



Ako uvažovať pri spoločnej práci

- Celú prácu označíme ako 1. Kto ju vykoná sám za 6 hodín, urobí za jednu hodinu $1/6$ práce.
- Pri spolupráci výkony sčítame. Pri súčasnom plnení a vypúšťaní nádrže od výkonu prítoku odčítame výkon odtoku.
- Pri neskoršom príchode alebo odchode pracovníka rozdelíme prácu na časové úseky.
- Základná rovnica: vykonaná časť práce = hodinový výkon $\times$ čas.

Pomôcka: Ak A urobí prácu za a hodín a B za b hodín, pri spoločnej práci platí $t \cdot (1/a + 1/b) = 1$.

Pokyn žiakom: Pri každej úlohe napíš, akú časť práce vykoná každý za jednu hodinu. Nezamieňaj počet odpracovaných hodín jednotlivých ľudí s celkovým časom od začiatku.

ZADANIA PRE ŽIAKOV

1. Dvojica pracuje súčasne

Sčítame časť práce za jednu hodinu.

01 Dve záhradníčky by samostatne vysadili záhon za 4 a 12 hodín. Za aký čas prácu dokončia, ak začnú naraz a budú pracovať rovnomerne?

02 Dve maliarky by natreli plot samostatne za 6 a 3 hodiny. Za aký čas prácu dokončia, ak začnú naraz a budú pracovať rovnomerne?

03 Dva rovnaké stroje by zásielku zabalili každý sám za 8 hodín. Za aký čas prácu dokončia, ak začnú naraz a budú pracovať rovnomerne?

04 Dvaja údržbári by vyčistili školský dvor za 10 a 15 hodín. Za aký čas prácu dokončia, ak začnú naraz a budú pracovať rovnomerne?

05 Dve skupiny dobrovoľníkov by roztriedili knihy za 5 a 20 hodín. Za aký čas prácu dokončia, ak začnú naraz a budú pracovať rovnomerne?

06 Dvaja pracovníci by pripravili športovisko za 9 a 18 hodín. Za aký čas prácu dokončia, ak začnú naraz a budú pracovať rovnomerne?

2. Traja pracovníci a ich spoločný výkon

Sčítame výkony všetkých troch.

07 Traja trpaslíci by zásobník drahokamov naplnili každý sám za 6 hodín. Za aký čas vykonajú celú prácu spoločne?

08 Tri tlačiarne by samostatne vytlačili školský časopis za 4, 6 a 12 hodín. Za aký čas vykonajú celú prácu spoločne?

09 Traja remeselníci by samostatne obnovili drevenú bránu za 8, 12 a 24 hodín. Za aký čas vykonajú celú prácu spoločne?

10 Tri baliace linky by samostatne zabalili objednávku za 10, 15 a 30 hodín. Za aký čas vykonajú celú prácu spoločne?

11 Traja dobrovoľníci by samostatne upratali komunitné centrum za 6, 8 a 24 hodín. Za aký čas vykonajú celú prácu spoločne?

12 Tri záhradné skupiny by samostatne vysadili park za 9, 12 a 18 hodín. Za aký čas vykonajú celú prácu spoločne?

3. Neznámy výkon druhého pracovníka

Výkon neznámeho získame odčítaním.

13 Majster by opravil školské lavice sám za 6 hodín. S pomocníkom trvá rovnaká práca 2 h 24 min. Za koľko hodín by ju vykonal pomocník sám?

14 Ela by pripravila výstavu sama za 12 hodín. S pomocníkom trvá rovnaká práca 4 hodiny. Za koľko hodín by ju vykonal pomocník sám?

15 Silnejšia pumpa by naplnila nádrž sama za 15 hodín. Spolu so slabšou pumpou ju naplnia za 6 hodín. Za koľko hodín by nádrž naplnila slabšia pumpa sama?

16 Robot A by presunul všetky balíky sám za 18 hodín. S pomocníkom trvá rovnaká práca 6 hodín. Za koľko hodín by ju vykonal pomocník sám?

17 Pracovníčka by roztriedila zásielky sama za 20 hodín. S pomocníkom trvá rovnaká práca 4 hodiny. Za koľko hodín by ju vykonal pomocník sám?

18 Murár by omietol miestnosť sám za 24 hodín. S pomocníkom trvá rovnaká práca 6 hodín. Za koľko hodín by ju vykonal pomocník sám?

4. Jeden začne pracovať skôr

Najprv vypočítame, koľko práce už bolo hotovej.

19 Janka maľuje kulisy. Sama by prácu zvládla za 6 hodín. Pracuje 2 hodiny sama a potom jej príde pomôcť pomocník, ktorý by tú istú prácu vykonal sám za 12 hodín. Ako dlho budú po jeho príchode pracovať spolu a koľko hodín bude trvať práca od začiatku?

20 Záhradník vysádza kríky. Sám by prácu zvládol za 8 hodín. Pracuje 3 hodiny sám a potom mu príde pomocník, ktorý by tú istú prácu vykonal sám za 8 hodín. Ako dlho budú po jeho príchode pracovať spolu a koľko hodín bude trvať práca od začiatku?

21 Robot A prenáša debničky. Sám by prácu zvládol za 10 hodín. Pracuje 2 hodiny sám a potom mu príde pomocník, ktorý by tú istú prácu vykonal sám za 5 hodín. Ako dlho budú po jeho príchode pracovať spolu a koľko hodín bude trvať práca od začiatku?

22 Marek pripravuje drevenú podlahu. Sám by prácu zvládol za 12 hodín. Pracuje 4 hodiny sám a potom mu príde pomocník, ktorý by tú istú prácu vykonal sám za 6 hodín. Ako dlho budú po jeho príchode pracovať spolu a koľko hodín bude trvať práca od začiatku?

23 Prvý brigádnik triedi knihy. Sám by prácu zvládol za 9 hodín. Pracuje 3 hodiny sám a potom mu príde pomocník, ktorý by tú istú prácu vykonal sám za 18 hodín. Ako dlho budú po jeho príchode pracovať spolu a koľko hodín bude trvať práca od začiatku?

24 Tím A čistí telocvičňu. Sám by prácu zvládol za 15 hodín. Pracuje 3 hodiny sám a potom mu príde pomocník, ktorý by tú istú prácu vykonal sám za 10 hodín. Ako dlho budú po jeho príchode pracovať spolu a koľko hodín bude trvať práca od začiatku?

5. Pracovník odíde skôr

Prácu rozdelíme na časové úseky.

25 Dva roboty kompletizujú zásielku. Prvý by úlohu urobil za 6 hodín a druhý za 12 hodín. Spoločne pracujú 2 hodiny. Potom druhý odíde a prvý dokončí zvyšok. Ako dlho trvá celá práca od začiatku?

26 Dve skupiny natierajú školský plot. Prvá by úlohu urobila za 8 hodín a druhá tiež za 8 hodín. Spoločne pracujú 3 hodiny. Potom druhá odíde a prvá dokončí zvyšok. Ako dlho trvá celá práca od začiatku?

27 Dvaja pracovníci vyrábajú rekvizity. Prvý by úlohu urobil za 9 hodín a druhý za 18 hodín. Spoločne pracujú 4 hodiny. Potom druhý odíde a prvý dokončí zvyšok. Ako dlho trvá celá práca od začiatku?

28 Dvaja záhradníci upravujú park. Prvý by úlohu urobil za 10 hodín a druhý za 15 hodín. Spoločne pracujú 3 hodiny. Potom druhý odíde a prvý dokončí zvyšok. Ako dlho trvá celá práca od začiatku?

29 Dvaja brigádnici triedia knihy. Prvý by úlohu urobil za 12 hodín a druhý za 12 hodín. Spoločne pracujú 2 hodiny. Potom druhý odíde a prvý dokončí zvyšok. Ako dlho trvá celá práca od začiatku?

30 Dva stroje vyrábajú súčiastky. Prvý by úlohu urobil za 15 hodín a druhý za 30 hodín. Spoločne pracujú 5 hodín. Potom druhý odíde a prvý dokončí zvyšok. Ako dlho trvá celá práca od začiatku?

6. Prítoky a odtoky

Prítoky pripočítame, odtok odpočítame.

31 Vodná nádrž má dva prítoky. Prvým by sa naplnila za 12 hodín, druhým za 18 hodín. Odtok by plnú nádrž vyprázdnil za 36 hodín. Za aký čas sa naplní prázdna nádrž, ak sú oba prítoky aj odtok stále otvorené?

32 Vodná nádrž má dva prítoky. Prvým by sa naplnila za 8 hodín, druhým za 12 hodín. Odtok by plnú nádrž vyprázdnil za 24 hodín. Za aký čas sa naplní prázdna nádrž, ak sú oba prítoky aj odtok stále otvorené?

33 Vodná nádrž má dva prítoky. Prvým by sa naplnila za 10 hodín, druhým za 15 hodín. Odtok by plnú nádrž vyprázdnil za 30 hodín. Za aký čas sa naplní prázdna nádrž, ak sú oba prítoky aj odtok stále otvorené?

34 Vodná nádrž má dva prítoky. Prvým by sa naplnila za 9 hodín, druhým za 18 hodín. Odtok by plnú nádrž vyprázdnil za 36 hodín. Za aký čas sa naplní prázdna nádrž, ak sú oba prítoky aj odtok stále otvorené?

35 Vodná nádrž má dva prítoky. Prvým by sa naplnila za 6 hodín, druhým za 12 hodín. Odtok by plnú nádrž vyprázdnil za 24 hodín. Za aký čas sa naplní prázdna nádrž, ak sú oba prítoky aj odtok stále otvorené?

36 Vodná nádrž má dva prítoky. Prvým by sa naplnila za 15 hodín, druhým za 20 hodín. Odtok by plnú nádrž vyprázdnil za 60 hodín. Za aký čas sa naplní prázdna nádrž, ak sú oba prítoky aj odtok stále otvorené?

7. Dve časti spoločnej práce

Najprv pracuje dvojica, potom sa zmení zostava.

37 Pri výrobe školských pomôcok by prvý pracovník splnil zákazku sám za 6 hodín a druhý za 12 hodín. Prvé 3 hodiny pracujú spolu, potom prvý odíde a druhý dokončí zákazku. Ako dlho bude druhý ešte pracovať a koľko trvá celá výroba?

38 Pri výrobe školských pomôcok by prvý pracovník splnil zákazku sám za 8 hodín a druhý za 12 hodín. Prvé 2 hodiny pracujú spolu, potom prvý odíde a druhý dokončí zákazku. Ako dlho bude druhý ešte pracovať a koľko trvá celá výroba?

39 Pri výrobe školských pomôcok by prvý pracovník splnil zákazku sám za 10 hodín a druhý za 15 hodín. Prvé 3 hodiny pracujú spolu, potom prvý odíde a druhý dokončí zákazku. Ako dlho bude druhý ešte pracovať a koľko trvá celá výroba?

40 Pri výrobe školských pomôcok by prvý pracovník splnil zákazku sám za 12 hodín a druhý za 24 hodín. Prvé 4 hodiny pracujú spolu, potom prvý odíde a druhý dokončí zákazku. Ako dlho bude druhý ešte pracovať a koľko trvá celá výroba?

41 Pri výrobe školských pomôcok by prvý pracovník splnil zákazku sám za 9 hodín a druhý za 18 hodín. Prvé 2 hodiny pracujú spolu, potom prvý odíde a druhý dokončí zákazku. Ako dlho bude druhý ešte pracovať a koľko trvá celá výroba?

42 Pri výrobe školských pomôcok by prvý pracovník splnil zákazku sám za 16 hodín a druhý za 16 hodín. Prvé 3 hodiny pracujú spolu, potom prvý odíde a druhý dokončí zákazku. Ako dlho bude druhý ešte pracovať a koľko trvá celá výroba?

8. Len časť práce

Hľadáme čas na určený zlomok celej práce.

43 Dve čerpadlá naplňajú nádrž. Prvé by ju samo naplnilo za 6 hodín a druhé za 12 hodín. Za aký čas spoločne naplnia polovicu nádrže? Obe začínajú naraz.

44 Dve tlačiarne tlačia učebné materiály. Prvá by celú prácu zvládla sama za 8 hodín a druhá tiež za 8 hodín. Za aký čas spoločne vykonajú $\frac{3}{4}$ celej práce? Obe začínajú naraz.

45 Dva roboty skladajú balíky. Prvý by celú prácu zvládol sám za 10 hodín a druhý za 15 hodín. Za aký čas spoločne vykonajú $\frac{2}{3}$ celej práce? Oba začínajú naraz.

46 Dvaja maliari natierajú plot. Prvý by celú prácu zvládol sám za 12 hodín a druhý za 24 hodín. Za aký čas spoločne vykonajú $\frac{5}{8}$ celej práce? Obaja začínajú naraz.

47 Dvaja pomocníci upratujú sklad. Prvý by celú prácu zvládol sám za 9 hodín a druhý za 18 hodín. Za aký čas spoločne vykonajú $\frac{2}{3}$ celej práce? Obaja začínajú naraz.

48 Dve skupiny zbierajú jablká. Prvá by celú prácu zvládla sama za 6 hodín a druhá za 9 hodín. Za aký čas spoločne vykonajú $\frac{5}{6}$ celej práce? Obe začínajú naraz.

9. Neznámy výkon pri neskoršom začiatku

Rozdelíme výkony podľa času práce.

49 Filip opravuje bicykle pre školský projekt. Sám by celú prácu zvládol za 8 hodín. Najskôr pracuje 2 hodiny sám, potom mu príde pomocník. Spolu prácu dokončia za ďalšie 3 hodiny. Za koľko hodín by ju vykonal pomocník sám?

50 Mechanik prehliada náradie. Sám by celú prácu zvládol za 12 hodín. Najskôr pracuje 3 hodiny sám, potom mu príde pomocník. Spolu prácu dokončia za ďalšie 4 hodiny. Za koľko hodín by ju vykonal pomocník sám?

51 Vedúca dielne zostavuje súpravy. Sama by celú prácu zvládla za 10 hodín. Najskôr pracuje 2 hodiny sama, potom jej príde pomôcť pomocník. Spolu prácu dokončia za ďalšie 4 hodiny. Za koľko hodín by ju vykonal pomocník sám?

52 Záhradník sadí stromčeky. Sám by celú prácu zvládol za 15 hodín. Najskôr pracuje 3 hodiny sám, potom mu príde pomocník. Spolu prácu dokončia za ďalších 6 hodín. Za koľko hodín by ju vykonal pomocník sám?

53 Dobrovoľníčka balí darčeky. Sama by celú prácu zvládla za 9 hodín. Najskôr pracuje 3 hodiny sama, potom jej príde pomôcť pomocník. Spolu prácu dokončia za ďalšie 3 hodiny. Za koľko hodín by ju vykonal pomocník sám?

54 Pracovník označuje knihy. Sám by celú prácu zvládol za 18 hodín. Najskôr pracuje 6 hodín sám, potom mu príde pomocník. Spolu prácu dokončia za ďalších 6 hodín. Za koľko hodín by ju vykonal pomocník sám?

10. Náročné kombinované úlohy

Dva alebo viac krokov so zmenou výkonu.

55 Príprava školského festivalu: pracovník A by všetko dokončil sám za 12 hodín, B za 8 hodín. Najprv A pracuje 2 hodiny sám, potom obaja pracujú spoločne 2 hodiny a nakoniec A odíde. Ako dlho bude B dokončovať zvyšok sám a aký je celkový čas od začiatku?

56 Úprava športového ihriska: pracovník A by všetko dokončil sám za 15 hodín, B za 10 hodín. Najprv A pracuje 3 hodiny sám, potom obaja pracujú spoločne 2 hodiny a nakoniec A odíde. Ako dlho bude B dokončovať zvyšok sám a aký je celkový čas od začiatku?

57 Kompletizácia knižných balíčkov: pracovník A by všetko dokončil sám za 20 hodín, B za 12 hodín. Najprv A pracuje 4 hodiny sám, potom obaja pracujú spoločne 3 hodiny a nakoniec A odíde. Ako dlho bude B dokončovať zvyšok sám a aký je celkový čas od začiatku?

58 Vysádzanie školskej záhrady: pracovník A by všetko dokončil sám za 18 hodín, B za 9 hodín. Najprv A pracuje 3 hodiny sám, potom obaja pracujú spoločne 2 hodiny a nakoniec A odíde. Ako dlho bude B dokončovať zvyšok sám a aký je celkový čas od začiatku?

59 Výroba divadelných kulís: pracovník A by všetko dokončil sám za 16 hodín, B za 8 hodín. Najprv A pracuje 2 hodiny sám, potom obaja pracujú spoločne 3 hodiny a nakoniec A odíde. Ako dlho bude B dokončovať zvyšok sám a aký je celkový čas od začiatku?

60 Obnova náučného chodníka: pracovník A by všetko dokončil sám za 24 hodín, B za 12 hodín. Najprv A pracuje 4 hodiny sám, potom obaja pracujú spoločne 2 hodiny a nakoniec A odíde. Ako dlho bude B dokončovať zvyšok sám a aký je celkový čas od začiatku?

METODICKÉ RIEŠENIA A POSTUPY

Pracujeme s celou prácou = 1. Výsledky v zlomkoch hodiny sú presné; ak je to možné, prevádzame ich na minúty. Všetci pracujú rovnomerným výkonom.

1. Dvojica pracuje súčasne

Úloha 1 | 3 hodiny

1. Prvý za hodinu vykoná $\frac{1}{4}$ práce, druhý $\frac{1}{12}$.
2. Spoločný výkon: $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ práce za hodinu.
3. Čas: $1 : \frac{1}{3} = 3$ hodiny.

Úloha 2 | 2 hodiny

1. Prvý za hodinu vykoná $\frac{1}{6}$ práce, druhý $\frac{1}{3}$.
2. Spoločný výkon: $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ práce za hodinu.
3. Čas: $1 : \frac{1}{2} = 2$ hodiny.

Úloha 3 | 4 hodiny

1. Prvý za hodinu vykoná $\frac{1}{8}$ práce, druhý $\frac{1}{8}$.
2. Spoločný výkon: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ práce za hodinu.
3. Čas: $1 : \frac{1}{4} = 4$ hodiny.

Úloha 4 | 6 hodín

1. Prvý za hodinu vykoná $\frac{1}{10}$ práce, druhý $\frac{1}{15}$.
2. Spoločný výkon: $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$ práce za hodinu.
3. Čas: $1 : \frac{1}{6} = 6$ hodín.

Úloha 5 | 4 hodiny

1. Prvý za hodinu vykoná $\frac{1}{5}$ práce, druhý $\frac{1}{20}$.
2. Spoločný výkon: $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$ práce za hodinu.
3. Čas: $1 : \frac{1}{4} = 4$ hodiny.

Úloha 6 | 6 hodín

1. Prvý za hodinu vykoná $\frac{1}{9}$ práce, druhý $\frac{1}{18}$.
2. Spoločný výkon: $\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$ práce za hodinu.
3. Čas: $1 : \frac{1}{6} = 6$ hodín.

2. Traja pracovníci a ich spoločný výkon

Úloha 7 | 2 hodiny

1. Ich hodinové výkony sú $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{6}$.
2. Spolu urobia $\frac{1}{2}$ práce za hodinu.
3. Potrebný čas je $1 : \frac{1}{2} = 2$ hodiny.

Úloha 8 | 2 hodiny

1. Ich hodinové výkony sú $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{12}$.
2. Spolu urobia $\frac{1}{2}$ práce za hodinu.
3. Potrebný čas je $1 : \frac{1}{2} = 2$ hodiny.

Úloha 9 | 4 hodiny

1. Ich hodinové výkony sú $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$ a $\frac{1}{24}$.
2. Spolu urobia $\frac{1}{4}$ práce za hodinu.
3. Potrebný čas je $1 : \frac{1}{4} = 4$ hodiny.

Úloha 10 | 5 hodín

1. Ich hodinové výkony sú $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$ a $\frac{1}{30}$.
2. Spolu urobia $\frac{1}{5}$ práce za hodinu.
3. Potrebný čas je $1 : \frac{1}{5} = 5$ hodín.

Úloha 11 | 3 hodiny

1. Ich hodinové výkony sú $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{24}$.
2. Spolu urobia $\frac{1}{3}$ práce za hodinu.
3. Potrebný čas je $1 : \frac{1}{3} = 3$ hodiny.

Úloha 12 | 4 hodiny

1. Ich hodinové výkony sú $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$ a $\frac{1}{18}$.
2. Spolu urobia $\frac{1}{4}$ práce za hodinu.
3. Potrebný čas je $1 : \frac{1}{4} = 4$ hodiny.

3. Neznámy výkon druhého pracovníka

Úloha 13 | 4 hodiny

1. Čas 2 h 24 min = $\frac{12}{5}$ h. Výkon dvojice je $1 : \frac{12}{5} = \frac{5}{12}$ práce za hodinu.
2. Pomocník vykoná za hodinu $\frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$ práce.

3. Sám teda potrebuje $1 : 1/4 = 4$ hodiny.

Úloha 14 | 6 hodín

1. Výkon dvojice je $1 : 4 = 1/4$ práce za hodinu.
2. Pomocník vykoná za hodinu $1/4 - 1/12 = 1/6$ práce.
3. Sám teda potrebuje $1 : 1/6 = 6$ hodín.

Úloha 15 | 10 hodín

1. Výkon dvojice je $1 : 6 = 1/6$ práce za hodinu.
2. Pomocník vykoná za hodinu $1/6 - 1/15 = 1/10$ práce.
3. Sám teda potrebuje $1 : 1/10 = 10$ hodín.

Úloha 16 | 9 hodín

1. Výkon dvojice je $1 : 6 = 1/6$ práce za hodinu.
2. Pomocník vykoná za hodinu $1/6 - 1/18 = 1/9$ práce.
3. Sám teda potrebuje $1 : 1/9 = 9$ hodín.

Úloha 17 | 5 hodín

1. Výkon dvojice je $1 : 4 = 1/4$ práce za hodinu.
2. Pomocník vykoná za hodinu $1/4 - 1/20 = 1/5$ práce.
3. Sám teda potrebuje $1 : 1/5 = 5$ hodín.

Úloha 18 | 8 hodín

1. Výkon dvojice je $1 : 6 = 1/6$ práce za hodinu.
2. Pomocník vykoná za hodinu $1/6 - 1/24 = 1/8$ práce.
3. Sám teda potrebuje $1 : 1/8 = 8$ hodín.

4. Jeden začne pracovať skôr

Úloha 19 | Po príchode 2 h 40 min; celkovo 4 h 40 min

1. Za prvých 2 h je hotových $1/3$ práce; zostáva $2/3$.
2. Ich spoločný hodinový výkon je $1/6 + 1/12 = 1/4$.
3. Po príchode pomocníka pracujú $2/3 : 1/4 = 8/3$ h.
4. Celkový čas od začiatku: $2 + 8/3 = 14/3$ h.

Úloha 20 | Po príchode 2 h 30 min; celkovo 5 h 30 min

1. Za prvých 3 h je hotových $\frac{3}{8}$ práce; zostáva $\frac{5}{8}$.
2. Ich spoločný hodinový výkon je $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.
3. Po príchode pomocníka pracujú $\frac{5}{8} : \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$ h.
4. Celkový čas od začiatku: $3 + \frac{5}{2} = 11\frac{1}{2}$ h.

Úloha 21 | Po príchode 2 h 40 min; celkovo 4 h 40 min

1. Za prvých 2 h je hotových $\frac{1}{5}$ práce; zostáva $\frac{4}{5}$.
2. Ich spoločný hodinový výkon je $\frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$.
3. Po príchode pomocníka pracujú $\frac{4}{5} : \frac{3}{10} = \frac{8}{3}$ h.
4. Celkový čas od začiatku: $2 + \frac{8}{3} = 14\frac{2}{3}$ h.

Úloha 22 | Po príchode 2 h 40 min; celkovo 6 h 40 min

1. Za prvých 4 h je hotových $\frac{1}{3}$ práce; zostáva $\frac{2}{3}$.
2. Ich spoločný hodinový výkon je $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$.
3. Po príchode pomocníka pracujú $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$ h.
4. Celkový čas od začiatku: $4 + \frac{8}{3} = 20\frac{2}{3}$ h.

Úloha 23 | Po príchode 4 hodiny; celkovo 7 hodín

1. Za prvých 3 h je hotových $\frac{1}{3}$ práce; zostáva $\frac{2}{3}$.
2. Ich spoločný hodinový výkon je $\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$.
3. Po príchode pomocníka pracujú $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$ h.
4. Celkový čas od začiatku: $3 + 4 = 7$ h.

Úloha 24 | Po príchode 4 h 48 min; celkovo 7 h 48 min

1. Za prvých 3 h je hotových $\frac{1}{5}$ práce; zostáva $\frac{4}{5}$.
2. Ich spoločný hodinový výkon je $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$.
3. Po príchode pomocníka pracujú $\frac{4}{5} : \frac{1}{6} = \frac{24}{5}$ h.
4. Celkový čas od začiatku: $3 + \frac{24}{5} = 39\frac{3}{5}$ h.

5. Pracovník odíde skôr**Úloha 25 | 5 hodín**

1. Za prvých 2 h vykonajú $2 \cdot (\frac{1}{6} + \frac{1}{12}) = \frac{1}{2}$ práce.
2. Zostáva $\frac{1}{2}$ práce.
3. Prvý ju sám dokončí za $\frac{1}{2} : \frac{1}{6} = 3$ h.
4. Celkovo $2 + 3 = 5$ h.

Úloha 26 | 5 hodín

1. Za prvých 3 h vykonajú $3 \cdot (1/8 + 1/8) = 3/4$ práce.
2. Zostáva $1/4$ práce.
3. Prvý ju sám dokončí za $1/4 : 1/8 = 2$ h.
4. Celkovo $3 + 2 = 5$ h.

Úloha 27 | 7 hodín

1. Za prvých 4 h vykonajú $4 \cdot (1/9 + 1/18) = 2/3$ práce.
2. Zostáva $1/3$ práce.
3. Prvý ju sám dokončí za $1/3 : 1/9 = 3$ h.
4. Celkovo $4 + 3 = 7$ h.

Úloha 28 | 8 hodín

1. Za prvých 3 h vykonajú $3 \cdot (1/10 + 1/15) = 1/2$ práce.
2. Zostáva $1/2$ práce.
3. Prvý ju sám dokončí za $1/2 : 1/10 = 5$ h.
4. Celkovo $3 + 5 = 8$ h.

Úloha 29 | 10 hodín

1. Za prvých 2 h vykonajú $2 \cdot (1/12 + 1/12) = 1/3$ práce.
2. Zostáva $2/3$ práce.
3. Prvý ju sám dokončí za $2/3 : 1/12 = 8$ h.
4. Celkovo $2 + 8 = 10$ h.

Úloha 30 | 12 h 30 min

1. Za prvých 5 h vykonajú $5 \cdot (1/15 + 1/30) = 1/2$ práce.
2. Zostáva $1/2$ práce.
3. Prvý ju sám dokončí za $1/2 : 1/15 = 15/2$ h.
4. Celkovo $5 + 15/2 = 25/2$ h.

6. Prítoky a odtoky**Úloha 31 | 9 hodín**

1. Za hodinu pritečie $1/12 + 1/18$ objemu nádrže.
2. Odtok odoberá $1/36$ objemu za hodinu.
3. Čistý výkon je $1/12 + 1/18 - 1/36 = 1/9$.

4. Naplňanie trvá $1 : 1/9 = 9$ h.

Úloha 32 | 6 hodín

1. Za hodinu pritečie $1/8 + 1/12$ objemu nádrže.
2. Odtok odoberá $1/24$ objemu za hodinu.
3. Čistý výkon je $1/8 + 1/12 - 1/24 = 1/6$.
4. Naplňanie trvá $1 : 1/6 = 6$ h.

Úloha 33 | 7 h 30 min

1. Za hodinu pritečie $1/10 + 1/15$ objemu nádrže.
2. Odtok odoberá $1/30$ objemu za hodinu.
3. Čistý výkon je $1/10 + 1/15 - 1/30 = 2/15$.
4. Naplňanie trvá $1 : 2/15 = 15/2$ h.

Úloha 34 | 7 h 12 min

1. Za hodinu pritečie $1/9 + 1/18$ objemu nádrže.
2. Odtok odoberá $1/36$ objemu za hodinu.
3. Čistý výkon je $1/9 + 1/18 - 1/36 = 5/36$.
4. Naplňanie trvá $1 : 5/36 = 36/5$ h.

Úloha 35 | 4 h 48 min

1. Za hodinu pritečie $1/6 + 1/12$ objemu nádrže.
2. Odtok odoberá $1/24$ objemu za hodinu.
3. Čistý výkon je $1/6 + 1/12 - 1/24 = 5/24$.
4. Naplňanie trvá $1 : 5/24 = 24/5$ h.

Úloha 36 | 10 hodín

1. Za hodinu pritečie $1/15 + 1/20$ objemu nádrže.
2. Odtok odoberá $1/60$ objemu za hodinu.
3. Čistý výkon je $1/15 + 1/20 - 1/60 = 1/10$.
4. Naplňanie trvá $1 : 1/10 = 10$ h.

7. Dve časti spoločnej práce

Úloha 37 | Ešte 3 hodiny; celkom 6 hodín

1. Spolu za 3 hodiny urobia $3 \cdot (1/6 + 1/12) = 3/4$ práce.
2. Zvyšok je $1/4$.

3. Druhý dokončí za $1/4 : 1/12 = 3$ h.

4. Celkom $3 + 3 = 6$ h.

Úloha 38 | Ešte 7 hodín; celkom 9 hodín

1. Spolu za 2 hodiny urobia $2 \cdot (1/8 + 1/12) = 5/12$ práce.

2. Zvyšok je $7/12$.

3. Druhý dokončí za $7/12 : 1/12 = 7$ h.

4. Celkom $2 + 7 = 9$ h.

Úloha 39 | Ešte 7 h 30 min; celkom 10 h 30 min

1. Spolu za 3 hodiny urobia $3 \cdot (1/10 + 1/15) = 1/2$ práce.

2. Zvyšok je $1/2$.

3. Druhý dokončí za $1/2 : 1/15 = 15/2$ h.

4. Celkom $3 + 15/2 = 21/2$ h.

Úloha 40 | Ešte 12 hodín; celkom 16 hodín

1. Spolu za 4 hodiny urobia $4 \cdot (1/12 + 1/24) = 1/2$ práce.

2. Zvyšok je $1/2$.

3. Druhý dokončí za $1/2 : 1/24 = 12$ h.

4. Celkom $4 + 12 = 16$ h.

Úloha 41 | Ešte 12 hodín; celkom 14 hodín

1. Spolu za 2 hodiny urobia $2 \cdot (1/9 + 1/18) = 1/3$ práce.

2. Zvyšok je $2/3$.

3. Druhý dokončí za $2/3 : 1/18 = 12$ h.

4. Celkom $2 + 12 = 14$ h.

Úloha 42 | Ešte 10 hodín; celkom 13 hodín

1. Spolu za 3 hodiny urobia $3 \cdot (1/16 + 1/16) = 3/8$ práce.

2. Zvyšok je $5/8$.

3. Druhý dokončí za $5/8 : 1/16 = 10$ h.

4. Celkom $3 + 10 = 13$ h.

8. Len časť práce

Úloha 43 | 2 hodiny

1. Hodinový spoločný výkon je $1/6 + 1/12 = 1/4$.

2. Potrebujú urobiť len $1/2$ práce, nie celý objem.
3. Čas je $1/2 : 1/4 = 2$ h.

Úloha 44 | 3 hodiny

1. Hodinový spoločný výkon je $1/8 + 1/8 = 1/4$.
2. Potrebujú urobiť len $3/4$ práce, nie celý objem.
3. Čas je $3/4 : 1/4 = 3$ h.

Úloha 45 | 4 hodiny

1. Hodinový spoločný výkon je $1/10 + 1/15 = 1/6$.
2. Potrebujú urobiť len $2/3$ práce, nie celý objem.
3. Čas je $2/3 : 1/6 = 4$ h.

Úloha 46 | 5 hodín

1. Hodinový spoločný výkon je $1/12 + 1/24 = 1/8$.
2. Potrebujú urobiť len $5/8$ práce, nie celý objem.
3. Čas je $5/8 : 1/8 = 5$ h.

Úloha 47 | 4 hodiny

1. Hodinový spoločný výkon je $1/9 + 1/18 = 1/6$.
2. Potrebujú urobiť len $2/3$ práce, nie celý objem.
3. Čas je $2/3 : 1/6 = 4$ h.

Úloha 48 | 3 hodiny

1. Hodinový spoločný výkon je $1/6 + 1/9 = 5/18$.
2. Potrebujú urobiť len $5/6$ práce, nie celý objem.
3. Čas je $5/6 : 5/18 = 3$ h.

9. Neznámy výkon pri neskoršom začiatku

Úloha 49 | 8 hodín

1. Prvý odpracoval spolu $2+3=5$ hodín, vykonal teda $5/8$ práce.
2. Pomocník musel za 3 h vykonať $3/8$ práce.
3. Jeho výkon je $3/8 : 3 = 1/8$ práce za hodinu.
4. Sám by potreboval $1 : 1/8 = 8$ h.

Úloha 50 | 9 h 36 min

1. Prvý odpracoval spolu $3+4=7$ hodín, vykonal teda $7/12$ práce.
2. Pomocník musel za 4 h vykonať $5/12$ práce.
3. Jeho výkon je $5/12 : 4 = 5/48$ práce za hodinu.
4. Sám by potreboval $1 : 5/48 = 48/5$ h.

Úloha 51 | 10 hodín

1. Prvý odpracoval spolu $2+4=6$ hodín, vykonal teda $3/5$ práce.
2. Pomocník musel za 4 h vykonať $2/5$ práce.
3. Jeho výkon je $2/5 : 4 = 1/10$ práce za hodinu.
4. Sám by potreboval $1 : 1/10 = 10$ h.

Úloha 52 | 15 hodín

1. Prvý odpracoval spolu $3+6=9$ hodín, vykonal teda $3/5$ práce.
2. Pomocník musel za 6 h vykonať $2/5$ práce.
3. Jeho výkon je $2/5 : 6 = 1/15$ práce za hodinu.
4. Sám by potreboval $1 : 1/15 = 15$ h.

Úloha 53 | 9 hodín

1. Prvý odpracoval spolu $3+3=6$ hodín, vykonal teda $2/3$ práce.
2. Pomocník musel za 3 h vykonať $1/3$ práce.
3. Jeho výkon je $1/3 : 3 = 1/9$ práce za hodinu.
4. Sám by potreboval $1 : 1/9 = 9$ h.

Úloha 54 | 18 hodín

1. Prvý odpracoval spolu $6+6=12$ hodín, vykonal teda $2/3$ práce.
2. Pomocník musel za 6 h vykonať $1/3$ práce.
3. Jeho výkon je $1/3 : 6 = 1/18$ práce za hodinu.
4. Sám by potreboval $1 : 1/18 = 18$ h.

10. Náročné kombinované úlohy**Úloha 55 | B sám ešte 3 h 20 min; celkom 7 h 20 min**

1. A sám urobí $2 \cdot 1/12 = 1/6$ práce.
2. Spolu za ďalšie 2 h urobia $2 \cdot (1/12 + 1/8) = 5/12$ práce.
3. Po oboch etapách je hotových $7/12$, zostáva $5/12$.
4. B dokončí za $5/12 : 1/8 = 10/3$ h.

5. Celkovo $2 + 2 + 10/3 = 22/3$ h.

Úloha 56 | B sám ešte 4 h 40 min; celkom 9 h 40 min

1. A sám urobí $3 \cdot 1/15 = 1/5$ práce.
2. Spolu za ďalšie 2 h urobia $2 \cdot (1/15 + 1/10) = 1/3$ práce.
3. Po oboch etapách je hotových $8/15$, zostáva $7/15$.
4. B dokončí za $7/15 : 1/10 = 14/3$ h.
5. Celkovo $3 + 2 + 14/3 = 29/3$ h.

Úloha 57 | B sám ešte 4 h 48 min; celkom 11 h 48 min

1. A sám urobí $4 \cdot 1/20 = 1/5$ práce.
2. Spolu za ďalšie 3 h urobia $3 \cdot (1/20 + 1/12) = 2/5$ práce.
3. Po oboch etapách je hotových $3/5$, zostáva $2/5$.
4. B dokončí za $2/5 : 1/12 = 24/5$ h.
5. Celkovo $4 + 3 + 24/5 = 59/5$ h.

Úloha 58 | B sám ešte 4 h 30 min; celkom 9 h 30 min

1. A sám urobí $3 \cdot 1/18 = 1/6$ práce.
2. Spolu za ďalšie 2 h urobia $2 \cdot (1/18 + 1/9) = 1/3$ práce.
3. Po oboch etapách je hotových $1/2$, zostáva $1/2$.
4. B dokončí za $1/2 : 1/9 = 9/2$ h.
5. Celkovo $3 + 2 + 9/2 = 19/2$ h.

Úloha 59 | B sám ešte 2 h 30 min; celkom 7 h 30 min

1. A sám urobí $2 \cdot 1/16 = 1/8$ práce.
2. Spolu za ďalšie 3 h urobia $3 \cdot (1/16 + 1/8) = 9/16$ práce.
3. Po oboch etapách je hotových $11/16$, zostáva $5/16$.
4. B dokončí za $5/16 : 1/8 = 5/2$ h.
5. Celkovo $2 + 3 + 5/2 = 15/2$ h.

Úloha 60 | B sám ešte 7 hodín; celkom 13 hodín

1. A sám urobí $4 \cdot 1/24 = 1/6$ práce.
2. Spolu za ďalšie 2 h urobia $2 \cdot (1/24 + 1/12) = 1/4$ práce.
3. Po oboch etapách je hotových $5/12$, zostáva $7/12$.
4. B dokončí za $7/12 : 1/12 = 7$ h.
5. Celkovo $4 + 2 + 7 = 13$ h.