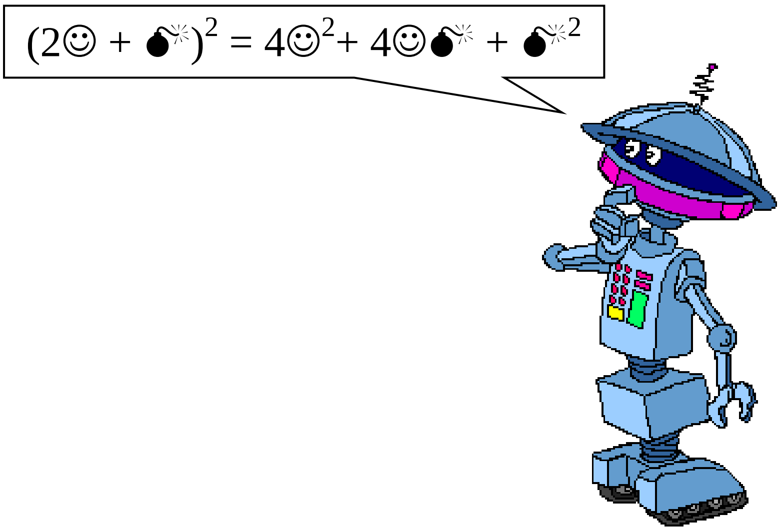
Zbierka riešených príkladov

VÝRAZY



Práca získala 3. miesto v celoslovenskej súťaži pedagógov 46. ročníka pedagogického čítania v roku 2003

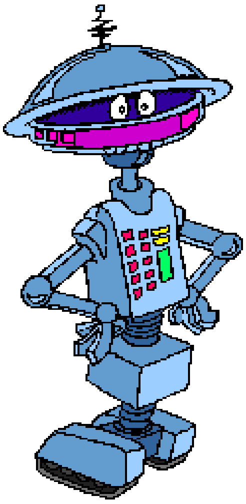
Predslov

Predkladám vám zbierku riešených príkladov na prijímacie pohovory pre stredné školy - výrazy. Zbierka je rozdelená do dvoch hlavných celkov – rozklad na súčin a lomené výrazy. Oba celky sú rozdelené na niekoľko kapitol , ktoré obsahujú stručný teoretický prehľad, vysvetlený postup pri riešení vzorových príkladov a vyriešené príklady.

Zbierka je určená predovšetkým žiakom 7.,8. a 9. ročníka základnej školy, žiakom 1. ročníka stredných škôl a samozrejme učiteľom matematiky . Verím, že táto zbierka si nájde miesto vo vašej knižnici a pomôže Vám pri riešení výrazov a utvrdení učiva o nich.

Moje poďakovanie patrí môjmu priateľovi a spolužiakovi z PF Nitra Mgr. Ľubošovi Mišovýchovi a prodekanovi fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre Doc. RNDr. Jozefovi Fulierovi CSc., ktorí mi svojimi podnetnými návrhmi a užitočnými radami pomohli pri zostavovaní tejto zbierky.

Mgr. Jozef Zvolenský



Zdravíčko, milý čitateľ !

Dovoľ mi, aby som sa predstavil. Volám sa Kubo No.1 . Som prvý slovenský robot na riešenie matematických úloh a problémov. No, nie je to až tak celkom pravda. Pretože mám vysokú spotrebu energie , programátori ma upravili špeciálne na riešenie výrazov (to vieš, tužkové baterky sú dnes drahé).

Musím priznať, že to nie je práve jednoduché učivo , ale verím, že s mojou pomocou ho hravo zvládneš . Výrazy treba vedieť riešiť nielen na 2. stupni základnej školy , ale potrebné sú na prijímacie pohovory a na strednej škole ti s nimi tiež nedajú pokoj. Tak prečo sa ich radšej poriadne nenaučiť ? Uvidíš, že keď ich pochopíš budú pre teba ako logická hádanka alebo zábavný hlavolam . Mám niekoľkých kamošov, ktorí sa pozrú na zadanie a len tak - z hlavy určia bezchybne výslednú úpravu. Ver mi, že ak to spolu prebehneme, dokážeš to aj ty !

Aby si sa necítil sám, občas ma v knižke uvidíš. Vybral som pre teba moje najkrajšie fotografie .

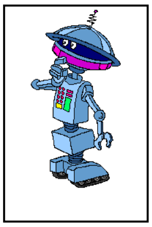


Foto číslo 1. (tvárim sa, že premýšľam)

Budem ňou označovať riešenia vzorových príkladov

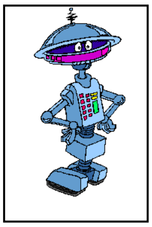


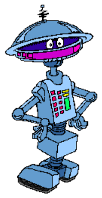
Foto číslo 2. (kde sa veľmi pekne usmievam)

Budem ňou označovať vyriešené príklady

Takže, kamoš, ak ti je všetko jasné ide sa na vec !

Rozklad na súčin

Pri hľadaní rozkladu daného výrazu na súčin používame rozličné úpravy. Niektoré sú jednoduché iné vyžadujú určitú dávku matematického dôvtipu. Ukážeme si tri najpoužívanejšie úpravy – vynímanie spoločného činiteľa, postupné vynímanie a rozklad pomocou vzorcov.



1.1. Vynímanie spoločného činiteľa

Pri vynímaní spoločného činiteľa sa snažíme vo výraze nájsť najväčšieho spoločného číselného deliteľa a spoločnú premennú s rovnakou (s najvyššou možnou) mocninou.

Vzorový príklad 1.

Rozložte na súčin výraz $\mathbf{24xy^2 + 28x^2y^2 + 18x^4y}$ **.**

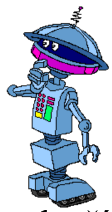
Riešenie

Najväčší spoločný deliteľ čísel 24, 28, 18 je číslo 2 . Potom členy výrazu môžeme zapísať v tvare

$24xy^2 \ = \mathbf{2xy} \ .\ 12y$,

$28x^2y^2 = \mathbf{2xy} \ .\ 14xy$,

$18x^4y \ = \mathbf{2xy} \ .\ 9x^3$,



kde výraz **2xy** je najväčším spoločným deliteľom týchto troch sčítancov. Teda

$24xy^2 + 28x^2y^2 + 18x^4y = (\mathbf{2xy}) \ .\ (12y) + (\mathbf{2xy}) \ .(14xy) + (\mathbf{2xy}) \ .\ (9x^3)=$

Po vyňatí výrazu **2xy** dostaneme pôvodný výraz zapísaný v tvare súčinu dvoch výrazov :

$(\mathbf{2xy}) \ .\ (12y + 14xy + 9x^3)$

Teda platí :

$24xy^2 + 28x^2y^2 + 18x^4y = \mathbf{2xy} \ .\ (12y + 14xy + 9x^3)$ ✓

Vzorový príklad 2.

Rozložte na súčin výraz $\mathbf{36abc + 24a^2bc^2 - 12a^2b^2c^2}$ **.**

Riešenie

Najväčším spoločným deliteľom čísel 36, 24, 12 je číslo 12 . Potom

$36abc = \mathbf{12abc} \ .\ 3$,

$24a^2bc^2 = \mathbf{12abc} \cdot 2ac,$
$-12a^2b^2c^2 = \mathbf{12abc} \cdot (-abc),$

preto výraz ***12abc*** je najväčším spoločným deliteľom týchto troch sčítancov. Teda

$36abc + 24a^2bc^2 - 12a^2b^2c^2 = (\mathbf{12abc}) \cdot 3 + (\mathbf{12abc}) \cdot 2ac + (\mathbf{12abc}) \cdot (-abc)$

Po vyňatí výrazu ***12abc*** dostaneme pôvodný výraz v tvare súčiny dvoch výrazov :

$(\mathbf{12abc}) \cdot (3 + 2ac - abc)$

Teda platí :

$36abc + 24a^2bc^2 - 12a^2b^2c^2 = \mathbf{12abc} \cdot [(3 + 2ac + (-abc)] =$
$= \mathbf{12abc} \cdot (3 + 2ac - abc)$ ✓

Vyriešené príklady :

1.) $a^3b + ab^3 = ab \cdot (a^2 + b^2)$ ✓

2.) $x^5 - x^2 = x^2 \cdot (x^3 - 1)$ ✓

3.) $6a^2b - 3a^2b^2 = 3a^2b \cdot (2 - b)$ ✓

4.) $32ab^2x - 48a^2bx^2 + 64ab^2x^2 = 16abx \cdot (2b - 3ax + 4bx)$ ✓

5.) $3x^3y^2 - 9x^4y^3 + 6x^5y^5 = 3x^3y^2 \cdot (1 - 3xy + 2x^2y^3)$ ✓

6.) $2aby - 10acy + 8bcy = 2y \cdot (ab - 5ac + 4bc)$ ✓

7.) $33m^2v - 27mv^3 + 24m^2v^2 = 3mv \cdot (11m - 9v^2 + 8mv)$ ✓

8.) $12z^2u^3 + 18zu^2 - 30z^3u = 6zu \cdot (2zu^2 + 3u - 5z^2)$ ✓

9.) $50a^2c^3 + 25ac^2 - 75a^4c^4 = 25ac^2 \cdot (2ac + 1 - 3a^3c^2)$ ✓

10.) $0{,}2x^3y^3 - 0{,}8xy + 1{,}2x^2y = 0{,}2xy \cdot (x^2y^2 - 4 + 6x)$ ✓

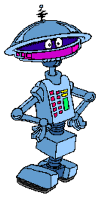
11.) $x^2y^2z^2 - x^3y^2z + x^2y^3z^4 = x^2y^2z \cdot (z - x + yz^3)$ ✓

12.) $30xy^4 - 75x^2y^3 - 90x^3y^2 = 15xy^2 \cdot (2y^2 - 5xy - 6x^2)$ ✓

13.) $80x^2yz - 48x^2y^2z^2 - 16xy^2z \;= 8xyz \,.\, (10x - 6xyz - 2y)$ ✓

15.) $a^2b^2c^2d^2 - abc^2d + abcd \;= abcd \,.\, (abcd - c + 1\,)$ ✓

16.) $0{,}5abc - 2ab^2c - 2{,}5abc^2 \;= 0{,}5abc \,.\, (1 - 4b - 5c)$ ✓



1.2.1. Postupné vynímanie

Niekedy nie je možné ,resp. je neefektívne, vyňať zo všetkých členov výrazu spoločný deliteľ alebo premennú. Vtedy sa snažíme nájsť spoločné „skupiny" členov s možnosťou vyňatia.

Najlepšie si to ukážeme na príklade.

Vzorový príklad 1.

Rozložte na súčin výraz $\boldsymbol{5ax + 25a^2x + 6by + 30aby}$ **.**

Riešenie

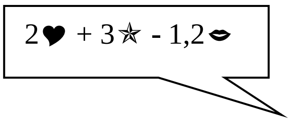
Môžeme si všimnúť, že prvé dva členy majú spoločného deliteľa ***5ax*** a ostatné dva členy ***6by***.

Vyjmeme :

$\boldsymbol{5ax} \,.\, (1 + 5a) + \boldsymbol{6by} \,.\, (1 + 5a),$

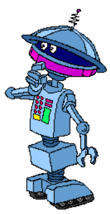
Po tejto úprave sme dostali dva sčítance, ktorých spoločným deliteľom je výraz ***1 + 5a***, ktorý vyjmeme :

$(\boldsymbol{1 + 5a}) \,.\, (5ax + 6by)$ ✓



Dostali sme teda :

$5ax + 25a^2x + 6by + 30aby = (\boldsymbol{1 + 5a}) \,.\, (5ax + 6by)$ ✓



Tento spôsob rozkladu výrazu nazývame postupné vynímanie.

Vyriešené príklady :

1.) $3u + 3 + uv + v \;= 3.(u + 1) + v.(u + 1) = (3 + v).(u + 1)$ ✓

2.) $10ax + 2ay + 15bx + 3by = 2a.(5x + y) + 3b.(5x + y) = (2a + 3b).(5x + y)$ ✓

3.) $ax^2 + bx^2 + ax - cx^2 + bx - cx \;= x^2.(a + b - c) + x.(a + b - c) =$
$= (a + b - c).(x^2 + x)$ ✓

4.) $ax - ay + bx - by = a.(x - y) + b.(x - y) = (a + b).(x - y)$ ✓

5.) $xy + xz + y^2 + yz = x.(y + z) + y.(y + z) = (x + y).(y + z)$ ✓

6.) $3ac - ad + 6bc - 2bd = a.(3c - d) + 2b.(3c - d) = (a + 2b).(3c - d)$ ✓

7.) $6mx + 9nx + 4my + 6ny = 2m.(3x + 2y) + 3n.(3x + 2y) =$
$= (2m + 3n).(3x + 2y)$ ✓

8.) $qr + r + q + 1 = r.(q + 1) + (q + 1) = (r + 1).(q + 1)$ ✓

9.) $a^3 - a^2 + a - 1 = a^2.(a - 1) + (a - 1) = (a^2 + 1).(a - 1)$ ✓

10.) $2a - 6 + 3b - ba = 2.(a - 3) + b.(3 - a) = (2 - b).(a - 3)$ ✓

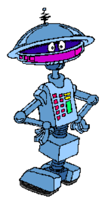
11.) $3a.(7 - 2c) + 4b.(2c - 7) = 3a.(7 - 2c) - 4b.(7 - 2c) = (3a - 4b).(7 - 2c)$ ✓

12.) $m.(2n - 5) - 3.(5 - 2n) = m.(2n - 5) + 3.(2n - 5) = (m + 3).(2n - 5)$ ✓

13.) $8x.(y + 3z) - 3z - y = 8x.(3z + y) - (3z + y) = (8x - 1).(3z + y)$ ✓

14.) $v + 5u.(v - 3) - 3 = 5u.(v - 3) + v - 3 = 5u.(v - 3) + (v - 3) =$
$= (v - 3).(5u + 1)$ ✓

15.) $3v + 7.(3v - 4u) - 4u = 7.(3v - 4u) + (3v - 4u) = (7 + 1).(3v - 4u) =$
$= 8.(3v - 4u)$ ✓



1.2.2. Postupné vynímanie s vyňatím čísla (– 1)

O niečo náročnejšie sú príklady na postupné vynímanie s nutnosťou úpravy výrazu tak, že z neho vyjmeme (– 1).
Tento postup sa používa v prípadoch , ak máme dva navzájom opačné výrazy napr. $(x - 5)$ a $(5 - x)$, alebo $(3x^2 - 1)$ a $(1 - 3x^2)$ a podobne. Aby sme ich upravili do zhodného tvaru vyjmeme z jedného (– 1). Šikovnejší žiaci robia túto úpravu „automaticky“ ale my pre lepšiu prehľadnosť tento medzikrok nevynecháme. Najlepšie si to ukážeme na príklade.

Vzorový príklad 1.

Rozložte na súčin výraz $xy + 3y - x - 3$.

Riešenie
Z prvých dvoch členov výrazu môžeme vyňať **y** a dostaneme

$xy + 3y - x - 3 = \mathbf{y}.\,(x + 3) - x - 3$,
Po tejto úprave môžeme pokračovať v úprave výrazu nasledovne :

$\mathbf{y}.\,(x + 3) - x - 3 = \mathbf{y}.\,(x + 3) + (\,-x - 3)$,

z výrazu $(\,-x - 3)$ môžeme vyňať $(\mathbf{-\,1})$ a dostaneme

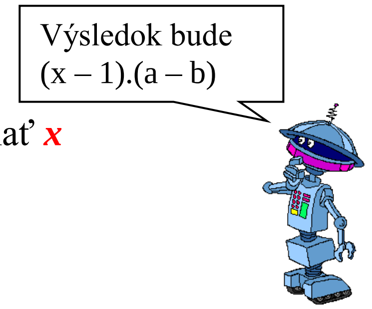
$(-x - 3) = (\mathbf{-\,1}).(\,x + 3\,) = \mathbf{-1}\,.\,(\,x + 3\,)$,

Takže po úprave dostaneme

$xy + 3y - x - 3 = \mathbf{y}.\,(x + 3) - x - 3 = \mathbf{y}\,.(\,x + 3) + (\mathbf{-\,1}).(\,x + 3\,) =$
$= \mathbf{y}.(x + 3) - 1\,.\,(\,x + 3\,) = (\mathbf{y - 1}).(x + 3)$ ✓

Vzorový príklad 2.

Rozložte na súčin výraz $\mathbf{ax - bx - a + b}$.



Riešenie
Z prvých dvoch členov výrazu môžeme vyňať $\mathbf{x}$
$ax - bx - a + b = \mathbf{x}\,.(a - b) - a + b$,

Pokračujeme v úprave
$\mathbf{x}\,.(a - b) - a + b = \mathbf{x}\,.(a - b) + (\,-a + b)$,

z výrazu $(\,-a + b)$ vyjmeme $(\,\mathbf{-\,1})$ a dostaneme

$(-a + b) = (\,\mathbf{-1}).(a - b) = \mathbf{-\,1}.(a - b)$,

Takže výraz môžeme ďalej upraviť

$ax - bx - a + b = \mathbf{x}\,.(a - b) - a + b = \mathbf{x}\,.(a - b) + (\,-a + b) =$
$= \mathbf{x}.(a - b) + (\,\mathbf{-1}).(a - b) = \mathbf{x}\,.(a - b) \mathbf{-\,1}.(a - b) = (\mathbf{x - 1}).(a - b)$ ✓

Vyriešené príklady :

1.) $6m - 18 + mn - 3n = 6.(m - 3) + n.(m - 3) = (6 + n).(m - 3)$ ✓
2.) $xy - y - x^2 + x = y.(x - 1) + (-x^2 + x) =$

$= y.\ (x-1) + x.(-x+1) =$
$= y.(x-1) + x\ .(-1).(x-1) =$
$= y.(x-1) - x.(x-1) = (y-x).(x-1)$ ✓

3.) $8pr + 12qr - 4ps - 6qs = 4r.(2p+3q) + (-4ps - 6qs) =$
$= 4r\ .(2p+3q) + 2s.(-2p-3q) =$
$= 4r.(2p+3q) + 2s.(-1).(2p+3q) =$
$= 4r.(2p+3q) - 2s.(2p+3q) =$
$= (4r-2s).(2p+3q) = 2.(2r-s).(2p+3q)$ ✓

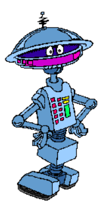
4.) $4x - 5c.(y-4x) - y = (4x-y) - 5c.(y-4x) =$
$=(4x-y) - 5c.(-1)(4x-y) =$
$= (4x-y) + 5c.(4x-y) = (4x-y).(1+5c)$ ✓

5.) $x^3 - 8x^2 - x + 8 = x^2.(x-8) + (-x+8) =$
$= x^2.(x-8) + (-1)\ .(x-8) =$
$= x^2.(x-8) - 1.(x-8) = (x^2-1).(x-8)$ ✓

6.) $pm + 7m - pq - 7q = m.(p+7) + q.(-p-7) =$
$= m.(p+7) + q.(-1).(p+7) =$
$= m.(p+7) - q.(p+7) = (m-q).(p+7)$ ✓

7.) $6.(4y-3z) - 4y + 3z = 6.(4y-3z) + (-4y+3z) =$
$= 6.(4y-3z) + (-1).(4y-3z) =$
$= 6.(4y-3z) - 1.(4y-3z) =$
$= (6-1).(4y-3z) = 5.(4y-3z)$ ✓

8.) $7x^2.(3y-5z) + 5z - 3y = 7x^2.(3y-5z) + (5z-3y) =$
$= 7x^2\ .(3y-5z) + (-1).(-5z+3y) =$
$= 7x^2\ .(3y-5z) + (-1).(3y-5z) =$
$= 7x^2\ .(3y-5z) - 1.(3y-5z) =$
$= (7x^2-1).(3y-5z)$ ✓



1.3. Rozklad výrazov pomocou vzorcov

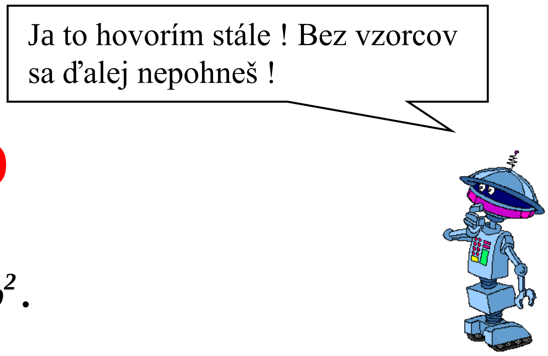
Ďalším z možných postupov, ktorý môžeme použiť pri rozklade výrazov na súčin, je rozklad pomocou vzorcov.

Budeme využívať tieto vzorce :

$\mathbf{(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$

$\mathbf{(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2}$

$\mathbf{A^2 - B^2 = (A - B) . (A + B)}$



Vzorový príklad 1.

Rozložte na súčin výraz $\mathbf{9a^2 - 12ab + 4b^2}$.

Riešenie

Použijeme vzorec $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$, v ktorom A = $3a$, B = $2b$, dostaneme :

$9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a)^2 - 2 .(3a).2b + (2b)^2 = (3a - 2b)^2 =$
$= (3a - 2b). (3a - 2b)$ ✓

Vyriešené príklady :

1.) $1 + 4y + 4y^2 = (1 + 2y)^2 = (1 + 2y).(1 + 2y)$ ✓

2.) $3m^2 - 30m + 75 = 3.(m^2 - 10m + 25) = 3.(m - 5)^2 =$
$= 3.(m - 5).(m - 5)$ ✓

3.) $a^2 + 4b^2 + 4ab = a^2 + 4ab + 4b^2 = (a + 2b)^2 = (a + 2b).(a + 2b)$ ✓

4.) $3xy^2 + 6xy + 3x = 3x. (y^2 + 2y + 1) = 3x.(y + 1).(y + 1)$ ✓

5.) $a^4b^2 - 6a^2b + 9 = (a^2b - 3)^2 = (a^2b - 3).(a^2b - 3)$ ✓

6.) $75x^2y^2 - 30xy + 3 = 3.(25x^2y^2 - 10xy + 1) = 3.(5xy - 1).(5xy - 1)$ ✓

Vzorový príklad 2.

Rozložte na súčin výraz $\mathbf{9x - x^3}$.

Riešenie

Výraz najprv rozložíme vyňatím $\mathbf{x}$ $9x - x^3 = \mathbf{x} . (9 - x^2)$,

Výraz $9 - x^2$ rozložíme podľa vzorca $\mathbf{A^2 - B^2 = (A - B) . (A + B)}$
kde $A = 3$ a $B = x$, teda

$9x - x^3 = x . (9 - x^2) = \mathbf{x} .(3^2 - x^2) = \mathbf{x}. (3 - x).(3 + x)$ ✓

Vyriešené príklady :

1.) $1 - 36a^2 = (1 - 6a).(1 + 6a)$ ✓

2.) $9m^2 - 64n^2 = (3m - 8n).(3m + 8n)$ ✓

3.) $144m^2 - n^4 = (12m)^2 - (n^2)^2 = (12m - n^2).(12m + n^2)$ ✓

4.) $2p^2 - 2r^2 = 2.(p^2 - r^2) = 2.(p - r).(p + r)$ ✓

5.) $5\,a^2b - 5b = 5b.(a^2 - 1) = 5b.(a - 1).(a + 1)$ ✓

6.) $x^3y - xy^3 = xy.(x^2 - y^2) = xy.(x - y).(x + y)$ ✓

7.) $100k^5 - k^3 = k^3.(100k^2 - 1) = k^3.(10k - 1).(10k + 1)$ ✓

8.) $5r^2 - 80r^4 = 5r^2.(1 - 16r^2) = 5r^2.(1 - 4r).(1 + 4r)$ ✓

9.) $3xy^2 - 3x^3 = 3x.(y^2 - x^2) = 3x\,.\,(y - x).(y + x)$ ✓

10.) $6ax^2 - 54y^2 = 6a.(x^2 - 9y^2) = 6a.(x - 3y).(x + 3y)$ ✓

11.) $mn^2 - 4mn^4 = mn^2.(1 - 4n^2) = mn^2.(1 - 2n).(1 + 2n)$ ✓

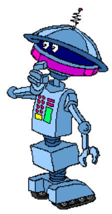
Vzorový príklad 3.
Rozložte na súčin výraz $\mathbf{(3a + b)^2 - c^2}$ **.**

Riešenie
Výraz je zapísaný v tvare rozdielu druhých mocnín, ktorých základ tvoria výrazy $\mathbf{(3a + b)}$ a $\mathbf{c}$.

Je preto možné vyžiť vzorec $\mathbf{A^2 - B^2 = (A - B)\,.\,(A + B)}$
kde A = $\underline{\mathbf{(3a + b)}}$,
B = $\mathbf{c}$

$$\mathbf{(A - B)\,.\,(A + B)}$$

$$(\underline{3a + b})^2 - c^2 = (\underline{3a + b} - c).(\underline{3a + b} + c)$$



Takže $(3a + b)^2 - c^2 = (3a + b - c).(3a + b + c)$ ✓

Vyriešené príklady :

1.) $(a - b)^2 - c^2 = (a - b - c).(a - b + c)$ ✓

2.) $(3x - 2)^2 - y^2 = [(3x - 2) - y].[(3x - 2) + y] =$
$= (3x - 2 - y).(3x - 2 + y)$ ✓

3.) $(3 - 4p)^2 - 81p^2 = [(3 - 4p) - 9p].[(3 - 4p) + 9p] =$
$= (3 - 4p - 9p).(3 - 4p + 9p) = (3 - 13p).(3 + 5p)$ ✓

4.) $36d^2 - (3c + 4d)^2 = [6d - (3c + 4d)].[6d + (3c + 4d)] =$
$= (6d - 3c - 4d).(6d + 3c + 4d) =$
$= (2d - 3c).(10d + 3c)$ ✓

5.) $(x - 3)^2 - (-a + x)^2 = [(x - 3) - (-a + x)].[(x - 3) + (-a + x)] =$
$= (x - 3 + a - x).(x - 3 - a + x) =$
$= (a - 3).(2x - 3 - a)$ ✓

6.) $36a^2 - (a^2 + 9)^2 = [6a - (a^2 + 9)].[6a + (a^2 + 9)] =$
$= (-a^2 + 6a - 9).(a^2 + 6a + 9) =$
$= -(a^2 - 6a + 9).(a + 3)^2 =$
$= -(a - 3)^2.(a + 3)^2$ ✓

7.) $81 - (x - y)^2 = [9 - (x - y)].[9 + (x - y)] = (9 - x + y).(9 + x - y)$ ✓

8.) $16 - (y - 2)^2 = [4 - (y - 2)].[4 + (y - 2)] =$
$= (4 - y + 2).(4 + y - 2) =$
$= (6 - y).(2 + y)$ ✓

9.) $4 - (x - 1)^2 = [2 - (x - 1)].[2 + (x - 1)] =$
$= (2 - x + 1).(2 + x - 1) = (3 - x).(1 + x)$ ✓

10.) $9x^2 - (x - 3)^2 = [3x - (x - 3)].[3x + (x - 3)] =$
$= (3x - x + 3).(3x + x - 3) = (2x + 3).(4x - 3)$ ✓

11.) $0{,}25r^2 - (r + s)^2 = [0{,}5r - (r + s)].[0{,}5r + (r + s)] =$
$= (0{,}5r - r - s).(0{,}5r + r + s) =$
$= (-0{,}5r - s).(1{,}5r + s)$ ✓

12.) $100a^2 - 9.(2a - 3b)^2 = [10a - 3.(2a - 3b)].[10a + 3.(2a - 3b)] =$
$= (10a - 6a + 9b).(10a + 6a - 9b) =$

$= (4a + 9b).(16a – 9b)$ ✓

13.) $(x + 2y)^2 – 4.(x – y)^2 = [(x + 2y) – 2.(x – y)]. [(x + 2y) + 2.(x – y)] =$
$= (x + 2y – 2x + 2y).(x + 2y + 2x – 2y) =$
$= (4y – x).3x= 3x .(4y – x)$ ✓

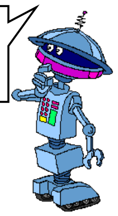
14.) $9x^2 – 16.(2x – 3y)^2 =[3x – 4.(2x – 3y)] . [3x + 4.(2x – 3y)] =$
$= (3x – 8x + 12 y).(3x + 8x – 12y) =$
$= (12y – 5x) .(11x – 12y)$ ✓

15.) $36 – (a^2 + 6a)^2 = [6 – (a^2 + 6a)] . [6 + (a^2 + 6a)] =$
$= (6 –a^2 – 6a).(6 + a^2 + 6a) =$
$= (– a^2 – 6a + 6).(a^2 + 6a + 6)$ ✓

Vzorový príklad 4.

Rozložte na súčin výraz $\boldsymbol{x^2 – 4x + 4 – z^2}$ **.**

Riešenie
Tento príklad je trošku náročnejší. Pri jeho riešení využijeme je kombináciu dvoch vzorcov.
Najprv výraz $x^2 – 4x + 4$ upravíme podľa vzorca $\mathbf{A^2 – 2AB + B^2 = (A – B)^2}$, t.j. $x^2 – 4x + 4 =(x – 2)^2$.
Po dosadení do pôvodného vzťahu dostaneme výraz $x^2 – 4x + 4 – z^2 = (x – 2)^2 – z^2$,
ktorý upravíme podľa vzorca $\mathbf{A^2 – B^2 = (A – B).(A + B)}$,
kde $A = (x – 2)$
$B = z$
Teda
$(x – 2)^2 – z^2 = (x – 2 – z) . (x – 2 + z)$



takže
$x^2 – 4x + 4 – z^2 =(x – 2)^2 – z^2 = (x – 2 – z) . (x – 2 + z)$ ✓

Vyriešené príklady :

1.) $m^2 – 12m + 36 – 9n^2 = (m^2 – 12m + 36) – 9n^2 = (m – 6)^2 – 9n^2 =$
$= [(m – 6) – 3n].[(m – 6) + 3n] =$
$= (m – 6 – 3n).(m – 6 + 3n)$ ✓

2.) $m^5 - m = m.(m^4 - 1) = m.(m^2 - 1).(m^2 + 1) =$
$= m.(m - 1).(m + 1).(m^2 + 1)$ ✓

3.) $u^3 - 8u^2 - u + 8 = u^2.(u - 8) + (-u + 8) =$
$= u^2(u - 8) + (-1)(u - 8) =$
$= u^2.(u - 8) - 1.(u - 8) =$
$= (u^2 - 1).(u - 8) = (u - 8).(u - 1).(u + 1)$ ✓

4.) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = x^2.(x - 3) + (-4x + 12) =$
$= x^2.(x - 3) + (-4).(x - 3) = x^2.(x - 3) - 4.(x - 3) =$
$= (x^2 - 4).(x - 3) = (x - 3).(x^2 - 4) =$
$= (x - 3).(x - 2).(x + 2)$ ✓

5.) $b^4 - 2b^2 - 1 - (b - 1)^2 = (b^2 - 1)^2 - (b - 1)^2 = [(b - 1).(b + 1)]^2 - (b - 1)^2 =$
$= [(b - 1).(b + 1) - (b - 1)].[(b - 1).(b + 1) + (b - 1)] =$
$= (b^2 - 1 - b + 1).(b^2 - 1 + b - 1) =$
$= (b^2 - b).(b^2 + b - 2) =$
$= b.(b - 1).(b^2 + b - 2)$ ✓

6.) $p^2y^2 - 4p^2 - y^2 + 4 = (p^2y^2 - y^2) + (-4p^2 + 4) =$
$= y^2.(p^2 - 1) + (-4).(p^2 - 1) =$
$= y^2.(p^2 - 1) - 4.(p^2 - 1) = (y^2 - 4).(p^2 - 1) =$
$= (y - 2).(y + 2).(p - 1).(p + 1)$ ✓

7.) $25x^2 - m^2 - 8m - 16 = 25x^2 - (m^2 + 8m + 16) =$
$= 25x^2 - (m + 4)^2 =$
$= (5x - m - 4).(5x + m + 4)$ ✓

8.) $m^3 - m^2n - mn^2 + n^3 = m^2.(m - n) - n^2.(m - n) = (m - n).(m^2 - n^2) =$
$= (m - n).(m - n).(m + n)$ ✓

9.) $(a^2 + b^2).(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2abxy - b^2y^2 =$
$= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx).(ay - bx)$ ✓

10.) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab - 2cd = (a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 + 2cd + d^2) =$
$= (a + b)^2 - (c + d)^2 =$
$= (a + b + c + d).(a + b - c - d)$ ✓

11.) $4u^2v^2 - 4u^2 - 9x^2v^2 + 9x^2 = 4u^2.(v^2 - 1) - 9x^2.(v^2 - 1) =$
$= (v^2 - 1).(4u^2 - 9x^2) =$
$= (v - 1).(v + 1).(2u - 3x).(2u + 3x)$ ✓

12.) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 = a^4(a^2 - 1) + 2a^2(a + 1) =$

$= a^4(a + 1)(a – 1) + 2a^2(a + 1) =$
$= a^2(a + 1).[a^2.(a – 1) + 2]$ ✓

13.) $y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 2y + 1 = (y^4 + 2y^2 + 1) – 2y^3 – 2y =$
$= (y^2 + 1)^2 – 2y.(y^2 + 1) =$
$= (y^2 + 1).(y^2 + 1 – 2y) = (y^2 + 1).(y – 1)^2$ ✓

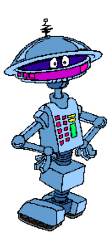
14.) $2k^4 - k^3 + k - 2 = 2.(k^4 – 1) – k.(k^2 – 1) =$
$= 2.(k^2 – 1).(k^2 + 1) – k.(k^2 – 1) =$
$= (k^2 – 1).[2.(k^2 + 1) – k] =$
$= (k + 1).(k – 1).(2k^2 – k + 2)$ ✓

15.) $a^2y - aby + a^3y - ab^2y = ay.(a – b + a^2 – b^2) =$
$= ay.[(a – b) + (a –b).(a + b)] =$
$= ay.[(a – b).(1 + a + b)] =ay.(a – b).(1 + a + b)$ ✓

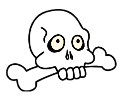
16.) $a^2c^2 - a^2 - b^2c^2 + b^2 = (a^2c^2 – a^2) + (– b^2c^2 + b^2) =$
$= a^2.(c^2 – 1) + (–1).(b^2)(c^2 –1) =$
$= a^2.(c^2 – 1) – b^2.(c^2 – 1) = (c^2 – 1).(a^2 – b^2) =$
$= (c- 1).(c+ 1).(a – b).(a + b)$ ✓

17.) $s + s^2 - s^3 - 1 = (s^2 – s^3) + (s – 1) = s^2.(1 – s) + (s – 1) =$
$= s^2.(1 – s) + (– 1).(– s + 1) =$
$= s^2.(1 – s) – (1 – s) =$
$= (s^2 – 1).(1 – s) = (s – 1).(s + 1).(1 – s)$ ✓

18.) $a^2x^2 - b^2y^2 - 2bcy - c^2 = a^2x^2 + (– c^2 – 2bcy – b^2y^2) =$
$= a^2x^2 + (–1).(c^2 + 2bcy + b^2y^2) =$
$= a^2x^2 – (c^2 + 2bcy + b^2y^2) =$
$= a^2x^2 – (c + by)^2 =$
$= (ax – c – by).(ax + c + by)$ ✓



1.4. Neobvyklé príklady - smrtonosná pasca

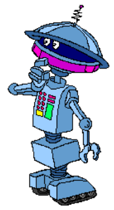


Občas sa vyskytne výraz, že pri najlepšej vôli nevidíte spôsob jeho úpravy . Nedá sa z neho nič vyňať (hoci pravdu povediac ± 1 môžete vybrať vždy), nemožno ho rozložiť podľa známych vzorcov. V takýchto prípadoch často pomôže nasledujúci trik – upraviť stredný člen výrazu (v tvare súčtu alebo rozdielu) .

Vyriešené príklady :

1.) $\mathbf{2y^2 + 3y + 1} = 2y^2 + 2y + y + 1 = 2y.(y + 1) + (y + 1) =$
$= (y + 1).(2y + 1)$ ✓

2.) $\mathbf{3x^2 - 2x - 1} = 3x^2 - 3x + x - 1 =$
$= 3x . (x - 1) + (x - 1) =$
$= (3x + 1).(x - 1)$ ✓



3.) $\mathbf{9r^2 - 3r - 2} = 9r^2 - 6r + 3r - 2 =$
$= 3r . (3r - 2) + (3r - 2) =$
$= (3r + 1) . (3r - 2)$ ✓

4.) $\mathbf{4a^2 - 3a - 1} = 4a^2 - 4a + a - 1 =$
$= 4a .(a - 1) + (a - 1) = (4a + 1).(a - 1)$ ✓

5.) $\mathbf{3a^2 + 5a - 2} = 3a^2 + 6a - a - 2 =$
$= 3a .(a + 2) - (a + 2) = (3a - 1).(a + 2)$ ✓

6.) $\mathbf{10x^2 - 13x + 3} = 10x^2 - 10x - 3x + 3 =$
$= 10x.(x - 1) - 3.(x - 1) = (10x - 3).(x - 1)$ ✓

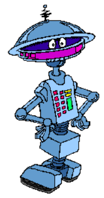
7.) $\mathbf{2y^4 + y^2 - 1} = 2y^4 + 2y^2 - y^2 - 1 = 2y^2.(y^2 + 1) - (y^2 + 1) =$
$= (2y^2 - 1).(y^2 + 1)$ ✓

8.) $\mathbf{6a^2 - 7a - 5} = 6a^2 - 10a + 3a - 5 = 2a.(3a - 5) + (3a - 5) =$
$= (2a + 1).(3a - 5)$ ✓

Lomené výrazy

Výrazy napr. $\dfrac{2x - 5}{x + 1}$; $\dfrac{16y^2}{(x - 2).(x - 3)}$; $\dfrac{8}{x^2 - a^2}$; . . . nazývame

lomené výrazy. Sú to vlastne zlomky, ktoré majú v čitateli a menovateli ľubovoľné mnohočleny. Kedže lomené výrazy sú zlomky, môžeme ich rozširovať a krátiť. Pri lomenom výraze musíme určiť kedy má výraz zmysel (**menovateľ lomeného výrazu sa nesmie rovnať nule !**).



2.1. Jednoduchý lomený výraz

Vzorový príklad 1.

Zjednodušte výraz $\dfrac{\boldsymbol{3u^2 + 12u + 12}}{\boldsymbol{6u^2 - 24}}$.

Riešenie
Upravíme čitateľa a menovateľa do tvaru súčinu, čo nám umožní vykrátiť prípadných spoločných deliteľov

$$3u^2 + 12u + 12 = 3.(u^2 + 4u + 4) = 3.(u + 2).\mathbf{(u + 2)},$$
$$6u^2 - 24 = 6.(u^2 - 4) = 6.(u - 2).\mathbf{(u + 2)}.$$

Spoločným deliteľom čitateľa i menovateľa je výraz $\mathbf{(u + 2)}$ a tiež môžeme krátiť číslom 3 činitele 3 a 6.

Takže : $$\frac{3u^2 + 12u + 12}{6u^2 - 24} = \frac{\cancel{3}^{1}.(u + 2).\cancel{(u + 2)}_{1}}{\cancel{6}^{2}.(u - 2).\cancel{(u + 2)}_{1}} = \frac{1.(u + 2).1}{2.(u - 2).1} = \frac{u + 2}{2.(u - 2)} \checkmark$$

Podmienky :
Vieme, že výraz nemá zmysel za predpokladu, že $\boldsymbol{6u^2 - 24 = 0}$ **.**

Pre určenie podmienok je spravidla vhodné (ale často aj nevyhnutné) rozložiť výraz do tvaru súčinu $\boldsymbol{a.b = 0}$ **,**
a využiť fakt , že súčin sa rovná nule ,práve vtedy ak $\boldsymbol{a = 0}$ alebo $\boldsymbol{b = 0}$.

Ľahko nahliadneme , že
$6u^2 - 24 = 6.(\mathbf{u - 2}).(\mathbf{u + 2}) = 0$,
odkiaľ vyplýva, že buď $(\mathbf{u - 2}) = 0$ alebo $(\mathbf{u + 2}) = 0$,
teda buď $\boldsymbol{u = 2}$ alebo $\boldsymbol{u = -2}$.

Využitím čoho dostaneme, že lomený výraz nemá zmysel pre $\boldsymbol{u = \pm 2}$

Ukážeme si, že výraz nemá pre $u = \pm 2$ zmysel , totiž

pre $\boldsymbol{u = -2}$ platí :

$$\frac{3u^2 + 12u + 12}{6u^2 - 24} = \frac{3.(-2)^2 + 12.(-2) + 12}{6.(-2)^2 - 24} = \frac{3.4 - 24 + 12}{6.4 - 24} =$$

$$= \frac{12 - 24 + 12}{24 - 24}$$

Je potrebné si uvedomiť, že vo výslednom riešení môže byť v čitateli 0 ale menovateli nie !

Pre $\boldsymbol{u = 2}$ platí :

$$\frac{3u^2 + 12u + 12}{6u^2 - 24} = \frac{3.(2)^2 + 12.2 + 12}{6.(2)^2 - 24} = \frac{3.4 + 24 + 12}{6.4 - 24} =$$

$$= \frac{12 + 24 + 12}{24 - 24}$$

Vzorový príklad 2.

Zjednodušte výraz $\dfrac{\boldsymbol{4x^2 - 4xy}}{\boldsymbol{x^2 - y^2}}$.

Riešenie

Výraz zjednodušíme tak, že čitateľa i menovateľa rozložíme na súčin a potom ich vykrátime spoločným deliteľom. Spoločným deliteľom výrazov

$4x^2 - 4xy = 4x \,.\, \boldsymbol{(x - y)},$

$x^2 - y^2 = \boldsymbol{(x - y)}.(x + y)$,

je výraz $\boldsymbol{(x - y)}$.

Úpravou dostaneme : $$\frac{4x^2 - 4xy}{x^2 - y^2} = \frac{4x.\,\cancel{(x - y)}._1}{{}_1.\cancel{(x - y)}\,.(x + y)} = \frac{4x \,.\, 1}{1.(x + y)} = \frac{4x}{x + y} \quad ✓$$

Ešte je potrebné určiť , kedy má výraz zmysel.

Celý lomený výraz nemá zmysle v prípade , že menovateľ $x^2 - y^2$ je rovný 0.

$x^2 - y^2 = 0$ môžeme rozložiť na súčin $(x - y).(x + y) = 0$
Z toho vyplýva, že buď $(x - y) = 0$ alebo $(x + y) = 0$,
čiže ak $x = y$ alebo $x = - y$.

$x^2 - y^2 = 0$ ak $x = \pm y$, teda lomený výraz nemá zmysel pre $x = \pm y$

Takže výraz $\dfrac{4x^2 - 4xy}{x^2 - y^2}$ má zmysel, ak $x \neq \pm y$.

Vyriešené príklady :

1.) $$\frac{2x^2 + 4xy + 2y^2}{4x^2 - 4y^2} = \frac{2.(x^2 + 2xy + y^2)}{4.(x^2 - y^2)} = \frac{2.(x + y).(x + y)}{4.(x - y).(x + y)} = \frac{x + y}{2.(x - y)} \checkmark$$

Podmienky : $x \neq \pm y$

2.) $$\frac{6x^2 + 12xy + 6y^2}{3x^2 - 3y^2} = \frac{6.(x^2 + 2xy + y^2)}{3.(x^2 - y^2)} = \frac{6.(x + y).(x + y)}{3.(x - y).(x + y)} = \frac{2.(x + y)}{x - y} \checkmark$$

Podmienky : $x \neq \pm y$

3.) $$\frac{3a^2 + 3a}{a^3 + 2a^2 + a} = \frac{3a.(a + 1)}{a.(a^2 + 2a + 1)} = \frac{3a.(a + 1)}{a.(a + 1).(a + 1)} = \frac{3a}{a + 1} \checkmark$$

Podmienky : $a \neq 0$, $a \neq -1$

4.) $$\frac{(2a - 1)^2 - a^2}{3a - 1} = \frac{[(2a - 1) - a].[(2a - 1) + a]}{3a - 1} = \frac{(a - 1).(3a - 1)}{3a - 1} = a - 1 \checkmark$$

Podmienky : $a \neq 1/3$

5.) $$\frac{m^2 - 4}{m^2 - 4m + 4} = \frac{(m - 2).(m + 2)}{(m - 2).(m - 2)} = \frac{m + 2}{m - 2} \quad ✓$$

Podmienky : $m \neq 2$

6.) $$\frac{8 - 2x^2}{9x - 3(8 - x)} = \frac{2.(4 - x^2)}{9x - 24 + 3x} = \frac{2.(2 - x).(2 + x)}{12x - 24} = \frac{- 2.(x - 2).(x + 2)}{12.(x - 2)} =$$

$$= -\frac{x + 2}{6} \quad ✓$$

Podmienky : $x \neq 2$

7.) $$\frac{a.(a - b) - b.(a - b)}{b.(a + b) + a.(a - b)} = \frac{(a - b).(a - b)}{ba + b^2 + a^2 - ab} = \frac{(a - b)^2}{a^2 + b^2} \quad ✓$$

Podmienky : $a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq \pm b$

8.) $$\frac{2x^2 + 4xy + 2y^2}{4x^2 - 4y^2} = \frac{2.(x^2 + 2xy + y^2)}{4.(x^2 - y^2)} = \frac{2.(x + y)^2}{4.(x + y).(x - y)} = \frac{x + y}{2.(x - y)} \quad ✓$$

Podmienky : $x \neq \pm y$

8.) $$\frac{ax + by - bx - ay}{x^2 - y^2} = \frac{(ax - ay) + (by - bx)}{(x - y).(x + y)} = \frac{a.(x - y) + b.(y - x)}{(x - y).(x + y)} =$$

$$= \frac{a(x - y) + b.(-1).(x - y)}{(x - y).(x + y)} = \frac{a(x - y) - b.(x - y)}{(x - y).(x + y)} = \frac{(a - b).(x - y)}{(x - y).(x + y)} =$$

$$= \frac{a - b}{x + y} \quad ✓$$

Podmienky : $x \neq \pm y$

10.) $$\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 27} = \frac{(x-3).(x-3)}{3.(x^2-9)} = \frac{(x-3).(x-3)}{3.(x-3).(x+3)} = \frac{x-3}{3.(x+3)} \quad \checkmark$$

Podmienky : $x \neq \pm 3$

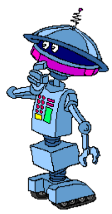
11.) $$\frac{6y^2 - 4xy}{(x-y)^2 - (x-2y)^2} = \frac{2y.(3y-2x)}{[(x-y)-(x-2y)].[(x-y)+(x-2y)]} =$$

$$= \frac{2y.(3y-2x)}{(x-y-x+2y).(x-y+x-2y)} = \frac{2y.(3y-2x)}{y.(2x-3y)} = \frac{2y.(-1).(2x-3y)}{y.(2x-3y)} =$$

$$= \frac{-2y.(2x-3y)}{y.(2x-3y)} = -2 \quad \checkmark$$

Podmienky : $y \neq 0$, $y \neq \frac{2}{3}x$

12.) $$\frac{4a^2 - 20ab + 25b^2}{6a^2 - 15ab} = \frac{(2a-5b).(2a-5b)}{3a.(2a-5b)} = \frac{2a-5b}{3a} \quad \checkmark$$



Podmienky : $a \neq 0$, $a \neq \frac{5}{2}b$

13.) $$\frac{(x-5).(x+7) - 2.(x-5)}{x^2 - 10x + 25} = \frac{x^2 + 7x - 5x - 35 - 2x + 10}{(x-5).(x-5)} =$$

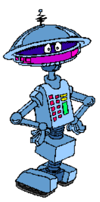
$$= \frac{x^2 - 25}{(x-5).(x+5)} = \frac{(x-5).(x+5)}{(x-5).\ (x-5)} = \frac{x+5}{x-5} \quad \checkmark$$

Podmienky : $x \neq 5$

14.) $$\frac{(9 - 6a + a^2).(6a + 18)}{3a^3 - 27a} = \frac{(a^2 - 6a + 9)\ .6.(a+3)}{3a.(a^2 - 9)} =$$

$$= \frac{(a-3).(a-3).6.(a+3)}{3a.(a-3).(a+3)} = \frac{2.(a-3)}{a} \quad \checkmark$$

Podmienky : $a \neq \pm 3$, $a \neq 0$



2.2. Násobenie lomeného výrazu celistvým výrazom

Vzorový príklad 1.

Zjednodušte výraz $\left(2x^3 + 2x^2y\right) . \dfrac{6x + 3}{3x^2 + 3xy}$.

Riešenie

Podľa pravidiel pre násobenie zlomkov dostaneme výraz

$$\frac{(2x^3 + 2x^2y)\ .\ (6x+3)}{3x^2 + 3xy} .$$

Čitateľa i menovateľa rozložíme do tvaru súčinu

$(2x^3 + 2x^2y)\ .\ (6x + 3) = 2x^2.\ (x + y)\ .\ 3\ .\ (2x + 1) = 2\ .3x^2\ .(x + y)\ .\ (2x + 1),$

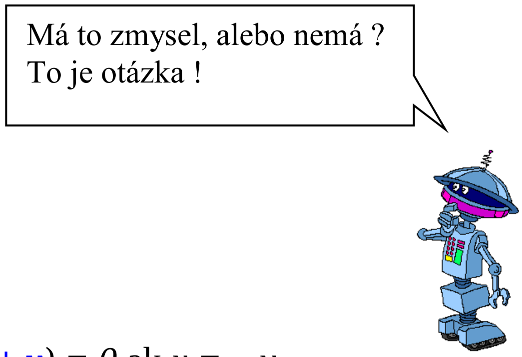
$3x^2 + 3xy = 3x\ .(x + y)$,

Spoločným deliteľom týchto výrazov je súčin **3x**. ***(x + y)***

Takže, po úprave dostávame :

$$\frac{(2x^3 + 2x^2y) \ . \ (6x + 3)}{3x^2 + 3xy} = \frac{2.x.\cancel{3x}^{1} . \cancel{(x + y)}^{1} .(2x + 1)}{{}_{1}\cancel{3x}. \cancel{(x + y)}_{1}} = 2x.(2x + 1) \ .$$

Podmienky :



Výraz nemá zmysel ak $3x^2 + 3xy = 0$,

odkiaľ $3x^2 + 3xy = \mathbf{3x}.(\mathbf{x + y}) = 0$,

čiže ak $\mathbf{3x} = 0$ alebo $(\mathbf{x + y}) = 0$.

Uvážme, že výraz $\mathbf{3x} = 0$ ak $x = 0$ a výraz $(\mathbf{x + y}) = 0$ ak $x = -y$.

Teda výraz nemá zmysel pre hodnoty premenných $x = 0$ a $x = -y$.

Takže výraz $(2x^3 + 2x^2y) \ . \ \dfrac{(6x + 3)}{3x^2 + 3xy}$ má zmysel, ak $x \neq 0$, $x \neq -y$.

Vyriešené príklady :

1.) $$(a^2 - 16) \ . \frac{a^3 - 4a^2}{a^2 - 8a + 16} = \frac{(a - 4).(a + 4). \ a^2.(a - 4)}{(a - 4).(a - 4)} = a^2.(a + 4) \ ✓$$

Podmienky : $a \neq 4$

2.) $$\frac{3x - 5b}{3x + 5b} . \ (9x^2 - 25b^2) = \frac{(3x - 5b).(3x - 5b).(3x + 5b)}{3x + 5b} = (3x - 5b)^2 \ ✓$$

Podmienky : $x \neq -\dfrac{5}{3}b$

3.) $$\frac{5y^3}{6y^2.(x + 1)} . \ x.(x^2 - 1) = \frac{5y.x.(x - 1).(x + 1)}{6.(x + 1)} = \frac{5yx.(x - 1)}{6} \ ✓$$

Podmienky : $x \neq -1,\ y \neq 0$

4.) $$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} \cdot (a^2 - ab) = \frac{(a + b).(a + b).a.(a - b)}{(a - b).(a + b)} = a.(a + b)\ \checkmark$$

Podmienky : $a \neq \pm b$

5.) $$(x^2 + 2xy) \cdot \frac{x - 2y}{x^2 - 4y^2} = \frac{x.(x + 2y).(x - 2y)}{(x - 2y).(x + 2y)} = x \quad \checkmark$$

Podmienky : $x \neq \pm 2y$

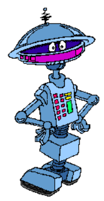
6.) $$(b + 3) \cdot \frac{b^2 - 3b}{b^2 - 9} = \frac{(b + 3).b.(b - 3)}{(b - 3).(b + 3)} = b \quad \checkmark$$

Podmienky : $b \neq \pm 3$

7.) $$\frac{2xy}{xy + y} \cdot \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1) = \frac{2xy.(x + 1)^2}{4.y.(x + 1)} = \frac{x.(x + 1)}{2} \quad \checkmark$$

Podmienky : $x \neq -1,\ y \neq 0$

2.3. Násobenie lomeného výrazu lomeným výrazom



Vzorový príklad 1.

Vypočítajte $$\frac{p^2 + pq}{5p^2 - 5q^2} \cdot \frac{p^2q - q^3}{2p^2 - 2p}.$$

Riešenie

Rozložíme čitateľa i menovateľa oboch výrazov do tvaru súčinu. Zrejme

$p^2 + pq \quad = p.(p + q),$

$5p^2 - 5q^2 = 5.(p^2 - q^2) = 5.(p - q).(p + q),$

$p^2q - q^3 \;= q.(p^2 - q^2) = q.(p - q).(p + q),$
$2p^2 - 2p \;= 2p.(p - 1)\,.$

Po dosadení dostávame

$$\frac{\boldsymbol{p^2 + pq}}{\boldsymbol{5p^2 - 5q^2}} \cdot \frac{\boldsymbol{p^2q - q^3}}{\boldsymbol{2p^2 - 2p}} = \frac{p.(p + q)}{5.(p - q).(p + q)} \cdot \frac{q.(p - q).(p + q)}{2p.(p - 1)}$$

a po vykrátení dostaneme

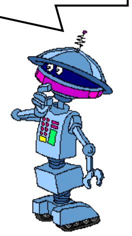
$$\frac{\cancel{p}.\cancel{(p + q)}^{\;1}}{5.\cancel{(p - q)}\,.\cancel{(p + q)}^{\;1}} \cdot \frac{q.\cancel{(p - q)}^{1}.(p + q)}{2.\cancel{p}.(\boldsymbol{p - 1})} = \frac{q.(p + q)}{10.(\boldsymbol{p - 1})} \checkmark$$

Súčin lomených výrazov nemá zmysel ak $\boldsymbol{5p^2 - 5q^2 = 0}$ *a zároveň* $\boldsymbol{2p^2 - 2p = 0}$

$\boldsymbol{5p^2 - 5q^2 = 0}$, ak $5.(\boldsymbol{p - q}).(\boldsymbol{p + q}) = 0$,
čiže ak $p - q = 0$ alebo $p + q = 0$.
Výraz $\boldsymbol{5p^2 - 5q^2 = 0}$ ak $\boldsymbol{p = q}$ alebo $\boldsymbol{p = -q}$

a zároveň

$\boldsymbol{2p^2 - 2p = 0}$, ak $2\boldsymbol{p}.(\boldsymbol{p - 1}) = 0$,
čiže $\boldsymbol{2p.(p - 1) = 0}$ ak $\boldsymbol{2p} = 0$ alebo $p - 1 = 0$.
Výraz $\boldsymbol{2p^2 - 2p = 0}$ ak $\boldsymbol{p = 0}$ alebo $\boldsymbol{p = 1}$



Takže súčin výrazov má zmysel ak $\boldsymbol{p \neq q}$, $\boldsymbol{p \neq -q}$, $\boldsymbol{p \neq 0}$, $\boldsymbol{p \neq 1}$.

Vyriešené príklady :

1.) $$\frac{9x^2 - 25}{3x^2 + 5x} \cdot \frac{4x^2}{(3x - 5)^2} = \frac{(3x - 5).(3x + 5).4x^2}{x.(3x + 5)\,.(3x - 5).(3x - 5)} = \frac{4x}{3x - 5} \checkmark$$

Podmienky : $x \neq 0$, $x \neq \pm 5/3$

2.) $$\frac{u^2 - 25}{5u - u^2} \cdot \frac{2u^3 + 10u^2}{u^2 + 10u + 25} = \frac{(u - 5).(u + 5).2u^2.(u + 5)}{u\,.(5 - u).(u + 5).(u + 5)} =$$

$$= \frac{2u^2.(u-5)}{u.(5-u)} = \frac{2u^2.(u-5)}{u.(-1).(-5+u)} = \frac{2u^2.(u-5)}{-u.(u-5)} = -2u \quad \checkmark$$

Podmienky : $u \neq 0$, $u \neq \pm 5$

3.) $$\frac{x^2+2x+3x+6}{5x^2-20} \cdot \frac{4x-8}{2x} = \frac{[x.(x+2)+3.(x+2)] \cdot 4.(x-2)}{5.(x^2-4) \cdot 2x} =$$

$$= \frac{(x+2).(x+3).4\,(x-2)}{10x.(x-2).(x+2)} = \frac{2.(x+3)}{5x} \quad \checkmark$$

Podmienky : $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$

4.) $$\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a-b).(a-b).(a+b)}{(a+b).(a+b).(a-b)} = \frac{a-b}{a+b} \quad \checkmark$$

Podmienky : $a \neq \pm b$

5.) $$\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{2x^2-2y^2}{x^2+xy} = \frac{(x+y) \cdot 2.(x^2-y^2)}{(x-y).x.(x+y)} = \frac{2.(x-y).(x+y)}{x.(x-y)} =$$

$$= \frac{2.(x+y)}{x} \quad \checkmark$$

Podmienky : $x \neq \pm y$, $x \neq 0$

6.) $$\frac{b^2-25}{b^2-3b} \cdot \frac{b^2-9}{b^2+5b} = \frac{(b-5).(b+5) \cdot (b-3).(b+3)}{b.(b-3) \cdot b.(b+5)} =$$

$$= \frac{(b-5).(b+3)}{b^2} \quad \checkmark$$

Podmienky : $b \neq 3$, $b \neq 0$, $b \neq -5$

7.) $$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} . \frac{x - 1}{x^2 + x} = \frac{(x + 1).(x + 1) .(x - 1)}{(x - 1).(x + 1) .x.(x + 1)} = \frac{1}{x}$$ ✓

Podmienky : $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$

8.) $$\frac{9x^2 - 25}{3x^2 + 5x} . \frac{4x^2}{(3x - 5)^2} = \frac{(3x - 5).(3x + 5) . 4x^2}{x.(3x + 5).(3x - 5).(3x - 5)} = \frac{4x}{3x - 5}$$ ✓

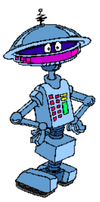
Podmienky : $x \neq 0$, $x \neq \pm 5/3$

9.) $$\frac{x^2 - y^2}{x^2} . \frac{x^4}{(x + y)^2} = \frac{(x - y).(x + y). x^4}{x^2 .(x + y).(x + y)} = \frac{x^2.(x - y)}{x + y}$$ ✓

Podmienky : $x \neq 0$, $x \neq - y$

10.) $$\frac{a^2}{a + b} . \frac{a^2 - b^2}{ab} . \frac{ab + b^2}{a^2 - ab} = \frac{a^2.(a - b).(a + b).b.(a + b)}{(a + b).ab . a.(a - b)} = a + b$$ ✓

Podmienky : $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq \pm b$



2.4. Lomený výraz ako podiel dvoch výrazov

Vzorový príklad 1.

Zjednodušte výraz $$\frac{m^2 - 9}{3m - m^2} : \frac{m^2 + 6m + 9}{2m^3 + 6m^2} .$$

Riešenie

Na základe známych pravidiel pre delenie zlomkov dostaneme

$$\frac{m^2 - 9}{3m - m^2} : \frac{m^2 + 6m + 9}{2m^3 + 6m^2} = \frac{m^2 - 9}{3m - m^2} \cdot \frac{2m^3 + 6m^2}{m^2 + 6m + 9}\ .$$

Uvážme, že

$$\frac{m^2 - 9}{3m - m^2} \cdot \frac{2m^3 + 6m^2}{m^2 + 6m + 9} = \frac{(m^2 - 9).(2m^3 + 6m^2)}{(3m - m^2).(m^2 + 6m + 9)}.$$

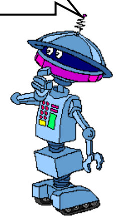
Čitateľa aj menovateľa rozložíme na súčin výrazov tak, aby sme ich mohli čo najvýhodnejšie krátiť .

$(m^2 - 9) = (m - 3).(m + 3)$,
$(2m^3 + 6m^2) = 2m^2.(m + 3)$,
$(3m - m^2) = m.(3 - m) = m.(-1).(-3 + m) = -m.(m - 3)$,
$(m^2 + 6m + 9) = (m + 3)^2 = (m + 3).(m + 3)$.

Po dosadení dostávame

$$\frac{(m^2 - 9).(2m^3 + 6m^2)}{(3m - m^2).(m^2 + 6m + 9)} = \frac{\cancel{(m-3)}\,.\,\cancel{(m+3)}\,.2m^{\cancel{2}\,1}.\,\cancel{(m+3)}}{-\cancel{m}.\,\cancel{(m-3)}\,.\cancel{(m+3)}\,.\,\cancel{(m+3)}} = \frac{2m}{-1} = -2m \ ✓$$

Pri výraze, ktorý ***sa skladá z podielu dvoch výrazov*** *je dôležité si uvedomiť, že podmienky pre platnosť výrazu určujeme* okrem ***menovateľov oboch lomených výrazov*** *aj z* ***čitateľa druhého zlomku*** **!**



$$\frac{m^2 - 9}{3m - m^2} : \frac{m^2 + 6m + 9}{2m^3 + 6m^2} = \frac{m^2 - 9}{3m - m^2} \cdot \frac{2m^3 + 6m^2}{m^2 + 6m + 9}$$

Takže v tomto prípade je potrebné , aby $3m - m^2 \neq 0$, a $m^2 + 6m + 9 \neq 0$ a $2m^3 + 6m^2 \neq 0$

To znamená, že výraz nemá zmysel ak
$3m - m^2 = 0$ a zároveň $m^2 + 6m + 9 = 0$ a zároveň $2m^3 + 6m^2 = 0$

Výraz $3m - m^2 = 0$ ak $m.(3 - m) = 0$,
teda ak $m = 0$ alebo $m = 3$

a zároveň

výraz $\boldsymbol{(m + 3)^2 = 0}$ ak $\boldsymbol{m + 3 = 0}$, (uvážme, že $\boldsymbol{m^2 + 6m + 9 = (m + 3)^2}$)
teda ak $\underline{m = -3}$ ***a zároveň***

výraz $\boldsymbol{2m^2.(m + 3) = 0}$ ak $\boldsymbol{m = 0}$ alebo $\boldsymbol{(m + 3) = 0}$,
teda ak $\underline{m = 0}$ alebo $\underline{m = -3}$

Podiel výrazov nemá zmysel, ak sú splnené všetky podčiarknuté podmienky !
Takže podiel výrazov má zmysel ak $m \neq \pm 3$ a $m \neq 0$

Vyriešené príklady :

1.) $$\frac{x^2 - 4x + 4}{x.(x-3)} : \frac{(x-2)^2}{3-x} = \frac{x^2 - 4x + 4}{x.(-1)(3-x)} \cdot \frac{3-x}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{(x-2).(x-2).(3-x)}{-x.(3-x).(x-2).(x-2)} = -\frac{1}{x} \quad \checkmark$$

Podmienky : $x \neq 2$, $x \neq 3$, $x \neq 0$

2.) $$\frac{t^2 - 25}{5t - t^2} :(t+5) = \frac{t^2 - 25}{5t - t^2} \cdot \frac{1}{(t+5)} = \frac{(t-5).(t+5).1}{t.(5-t).(t+5)} =$$

$$= \frac{(-1)(5-t).(t+5)}{t.(5-t).(t+5)} = \frac{-(5-t).(t+5)}{t.(5-t).(t+5)} = -\frac{1}{t} \quad \checkmark$$

Podmienky : $t \neq 0$, $t \neq \pm 5$

3.) $$\frac{5 - 5a}{(1+a)^2} : \frac{10 - 10a^2}{3 + 3a} = \frac{5 - 5a}{(1+a)^2} \cdot \frac{3 + 3a}{10 - 10a^2} =$$

$$= \frac{5.(1-a)}{(1+a).(1+a)} \cdot \frac{3.(1+a)}{10.\ (1-a^2)} = \frac{15.(1-a).(1+a)}{10.(1+a).(1+a).(1-a).(1+a)} =$$

$$= \frac{3}{2.\,(1 + a).(1 + a)} = \frac{3}{2.(1 + a)^2} \quad \checkmark$$

Podmienky : $a \neq \pm 1$

4.) $$\frac{4a}{2x^2 - 2y^2} : \frac{2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{4a}{2x^2 - 2y^2} \cdot \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2} =$$

$$= \frac{4a}{2.(x - y).(x + y)} \cdot \frac{(x + y)^2}{2} = \frac{4a.(x + y)(x + y)}{4.(x - y).(x + y)} =$$

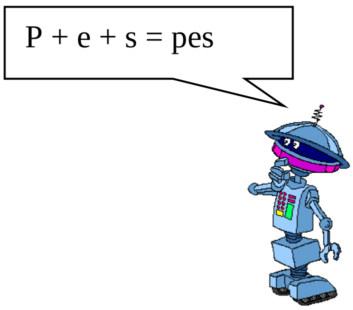
$$= \frac{a.(x + y)}{x - y} \quad \checkmark$$

Podmienky : $x \neq \pm y$

5.) $$\frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2} : \frac{b - a}{c + d} = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2} \cdot \frac{c + d}{b - a} = \frac{(a - b).(a + b).(c + d)}{(c - d).(c + d).(b - a)} =$$

$$= \frac{(-1).(b - a).(a + b).(c + d)}{(c - d).(c + d).(b - a)} = \frac{-(b - a).(c + d).(a + b)}{(b - a).(c + d).(c - d)} =$$

$$= \frac{-(a + b)}{c - d} = \frac{a + b}{d - c} \quad \checkmark$$



Podmienky : $a \neq b$, $c \neq \pm d$

6.) $$\frac{4 - x^2}{2x.(3x + 1)} : \frac{3x^2 - 12}{x + 3x^2} = \frac{4 - x^2}{2x.(3x + 1)} \cdot \frac{x + 3x^2}{3x^2 - 12} =$$

$$= \frac{(2-x).(2+x)}{2x.(3x+1)} \cdot \frac{x.(1+3x)}{3.(x^2-4)} = \frac{(-1).(x-2).(2+x)}{2x.(3x+1)} \cdot \frac{x.(1+3x)}{3.(x-2).(x+2)} =$$

$$= \frac{-\ x.(x-2).(2+x).(1+3x)}{6x.(3x+1).(x-2).(x+2)} = -\ \frac{1}{6} \quad \checkmark$$

Podmienky : $x \neq 0,\ x \neq -1/3\ ,\ x \neq \pm 2$

7.) $$\frac{x^2-y^2}{z^2} : \frac{x-y}{z} = \frac{x^2-y^2}{z^2} \cdot \frac{z}{x-y} = \frac{(x-y).(x+y)\ .\ z}{z^2\ .\ (x-y)} =$$

$$= \frac{x+y}{z} \quad \checkmark$$

Podmienky : $z \neq 0,\ x \neq y$

8.) $$\frac{2x^2-2y^2}{xy} : \frac{x+y}{4x^2y^2} = \frac{2.(x-y).(x+y)}{xy} \cdot \frac{4x^2y^2}{x+y} = 8xy.(x-y) \ \checkmark$$

Podmienky : $x \neq -y\ ,\ x \neq 0,\ y \neq 0$

9.) $$\frac{x^2+2xy}{y} : (x^2-4y^2) = \frac{x.(x+2y)}{y} \cdot \frac{1}{(x-2y).(x+2y)} = \frac{x}{y\ .\ (x-2y)} \quad \checkmark$$

Podmienky : $x \neq \pm 2y\ ,\ y \neq 0$

10.) $$\frac{a^2\ -b^2}{6a^2b^2} : \frac{a+b}{3ab} = \frac{(a-b).(a+b)}{6a^2b^2} \cdot \frac{3ab}{(a+b)} = \frac{(a-b)}{2ab} \quad \checkmark$$

Podmienky : $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq - b$

11.) $$\frac{14}{7t^2 + 7u^2} : \frac{2u + 2t}{u^4 - t^4} = \frac{14}{7.(t^2 + u^2)} \cdot \frac{(u^2 - t^2).(u^2 + t^2)}{2.(u + t)} =$$

$$= \frac{14.\ (u - t).(u + t).(u^2 + t^2)}{14.(u + t).(t^2 + u^2)} = u - t \quad ✓$$

Podmienky : $u \neq - t$

12.) $$\frac{2x - 6}{4 - x} : \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8x + 16} = \frac{2.(x - 3)}{(-1).(x - 4)} \cdot \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 9} =$$

$$= \frac{2.(x - 3)}{-(x - 4)} \cdot \frac{(x - 4).(x - 4)}{(x - 3).(x + 3)} = \frac{2.(x - 3)(x - 4).(x - 4)}{-(x - 4).(x - 3).(x + 3)} =$$

$$= -\frac{2.(x - 4)}{x + 3} \quad ✓$$

Podmienky : $x \neq \pm 3$, $x \neq 4$

13.) $$\frac{1}{x^2 - x} : \frac{1}{x^2 - x^3} = \frac{1}{x^2 - x} \cdot \frac{x^2 - x^3}{1} = \frac{x^2 - x^3}{x^2 - x} =$$

$$= \frac{x^2.(1 - x)}{x.(x - 1)} = \frac{x.(1 - x)}{(-1).(1 - x)} = \frac{x.(1 - x)}{-(1 - x)} = -x \quad ✓$$

Podmienky : $x \neq 0$, $x \neq 1$

14.) $$\frac{2x^2+4xy+2y^2}{x^2-2x}:\frac{4x^2-4y^2}{x^2-xy}=\frac{2.(x+y)^2}{x.(x-2)}.\frac{x^2-xy}{4x^2-4y^2}=$$

$$=\frac{2.(x+y).(x+y)}{x.(x-2)}.\frac{x.(x-y)}{4.(x-y).(x+y)}=$$

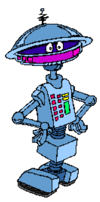
$$=\frac{2x.(x+y).(x+y).(x-y)}{4x.(x+y).(x-y).(x-2)}=\frac{x+y}{2.(x-2)}\ \checkmark$$

Podmienky : $x \neq 0,\ x \neq 2,\ x \neq \pm y$

15.) $$\frac{x^2+mx+nx+mn}{x^2+xr+xn+nr}:\frac{x^2-m^2}{x^2-r^2}=\frac{x.(x+m)+n.(x+m)}{x.(x+r)+n.(x+r)}.\frac{x^2-r^2}{x^2-m^2}=$$

$$=\frac{(x+n).(x+m)}{(x+n).(x+r)}.\frac{(x-r).(x+r)}{(x-m).(x+m)}=\frac{x-r}{x-m}\ \checkmark$$

Podmienky : $x \neq \pm r,\ x \neq \pm m,\ x \neq -n$



2.5. Súčet a rozdiel lomených výrazov

Lomené výrazy sčitujeme (odčitujeme) tak, že najprv ich upravíme na spoločného menovateľa, ktorým je vhodný spoločný násobok (spravidla berieme najmenší spoločný násobok) daných výrazov v menovateli, a potom čitatele sčítame (odčítame).

Vzorový príklad 1.

Vypočítajte $$\frac{1}{a-1}+\frac{a-1}{a+1}-\frac{4a}{a^2-1}-1$$

Riešenie

Využitím známeho vzorca $\mathbf{a^2 - 1 = (a - 1) . (a + 1)}$ ľahko nahliadneme, že spoločným násobkom výrazov $\mathbf{a - 1}$, $\mathbf{a + 1}$, $\mathbf{a^2 - 1}$ je výraz $\mathbf{a^2 - 1}$.

Dané výrazy majú zmysel ak všetky tri zlomky majú menovatele rôzne od 0 .
To znamená, že súčasne musí platiť
$\mathbf{a - 1} \neq 0$, $\mathbf{a + 1} \neq 0$, $\mathbf{a^2 - 1} = (a - 1).(a + 1) \neq 0$,
čiže $a \neq 1$, $a \neq -1$

Takže dostávame :

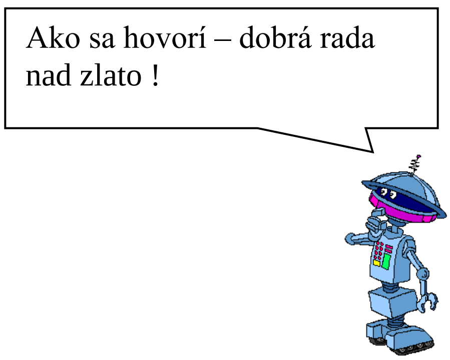
$$\frac{1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} - \frac{4a}{a^2-1} - 1 = \frac{1.(a+1) + (a+1).(a-1) - 4a - 1.(a^2-1)}{a^2-1} =$$

$$= \frac{a + 1 + (a^2 - 2a + 1) - 4a - a^2 + 1}{a^2-1} =$$

$$= \frac{a + 1 + a^2 - 2a + 1 - 4a - a^2 + 1}{a^2-1} = \frac{-5a + 3}{a^2-1} = \frac{3 - 5a}{a^2-1} \checkmark$$

Vzorový príklad 2.

Upravte $$\frac{7v - 1}{2v^2 + 6v} + \frac{5 - 3v}{v^2 - 9}$$



Riešenie

Ak zvážime, že platí
$\mathbf{2v^2 + 6v = 2v . (v + 3)}$,
$\mathbf{v^2 - 9 = (v - 3).(v + 3)}$, tak ľahko nahliadneme,
že najväčším spoločným násobkom je výraz $\mathbf{2v .(v- 3).(v + 3)}$

Upravovaný výraz má zmysel ak súčasne platí :
$2v^2 + 6v \neq 0$, $v^2 - 9 \neq 0$ t.j.,

ak $2v.(v + 3) \neq 0$, $(v - 3).(v + 3) \neq 0$, čiže ak **$v \neq 0$, $v \neq 3$** a **$v \neq -3$**

Využitím uvedeného faktu a postupných úprav dostaneme :

$$\frac{\boldsymbol{7v - 1}}{\boldsymbol{2v^2 + 6v}} + \frac{\boldsymbol{5 - 3v}}{\boldsymbol{v^2 - 9}} = \frac{7v - 1}{2v\,.\,(v + 3)} + \frac{5 - 3v}{(v - 3).(v + 3)} =$$

$$= \frac{(7v - 1).(v - 3) + (5 - 3v).2v}{2v.(v + 3).(v - 3)} = \frac{7v^2 - 21v - v + 3 + 10v - 6v^2}{2v.(v + 3).(v - 3)} =$$

$$= \frac{v^2 - 12v + 3}{2v.(v + 3).(v - 3)} = \frac{v^2 - 12v + 3}{2v.(v^2 - 9)} \checkmark$$

Vyriešené príklady :

1.) $$\frac{1 + x}{1 - x} - \frac{1 - x}{1 + x} - \frac{x.(4 - x)}{1 - x^2} =$$

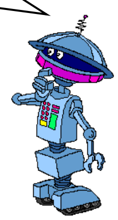
$$= \frac{(1 + x).(1 + x) - (1 - x).(1 - x) - x.(4 - x)}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{1 + 2x + x^2 - (1 - 2x + x^2) - 4x + x^2}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{1 + 2x + x^2 - 1 + 2x - x^2 - 4x + x^2}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{1 - x^2} \checkmark$$

Ozaj , skoro som zabudol ! Pozdravuje ťa filmová hviezda číslo 5.(žije) !!!



Podmienky : $x \neq \pm 1$

2.) $$\frac{a-2b}{a+b} - \frac{2a-b}{b-a} - \frac{2a^2}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{a-2b}{a+b} - \frac{2a-b}{-1.(a-b)} - \frac{2a^2}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{a-2b}{a+b} + \frac{2a-b}{a-b} - \frac{2a^2}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{(a-2b).(a-b) + (2a-b).(a+b) - 2a^2}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{(a^2 - ab - 2ab + 2b^2) + (2a^2 + 2ab - ab - b^2) - 2a^2}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{a^2 - 3ab + 2b^2 + 2a^2 + ab - b^2 - 2a^2}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} = \frac{(a-b).(a-b)}{(a-b).(a+b)} =$$

$$= \frac{a-b}{a+b} \checkmark$$

Podmienky : $a \neq \pm b$

3.) $$\frac{2a-1}{2a} - \frac{2a}{2a-1} - \frac{1}{2a-4a^2} =$$

$$= \frac{2a-1}{2a} - \frac{2a}{2a-1} - \frac{1}{2a.(1-2a)} =$$

$$= \frac{2a-1}{2a} - \frac{2a}{2a-1} - \frac{1}{-2a\ .(2a-1)} =$$

$$= \frac{2a-1}{2a} - \frac{2a}{2a-1} + \frac{1}{2a\ .(2a-1\ )} =$$

$$= \frac{(2a-1).(2a-1) - 2a\ .2a\ + 1}{2a.(2a-1)} = \frac{(4a^2 - 2a - 2a + 1) - 4a^2 + 1}{2a.(2a-1)} =$$

$$= \frac{4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 + 1}{2a.(2a-1)} = \frac{2-4a}{2a.(2a-1)} = \frac{2.(1-2a)}{2a.(2a-1)} =$$

$$= \frac{-2.(2a-1)}{2a.(2a-1)} = -\frac{1}{a} \checkmark$$

Podmienky : $a \neq 0$, $a \neq 0{,}5$

4.) $$\frac{2x-3y}{2x+3y} - \frac{2x+3y}{2x-3\ y} = \frac{(2x-3y).(2x-3y) - (2x+3y).(2x+3y)}{(2x+3y).(2x-3y)} =$$

$$= \frac{(4x^2 - 6xy - 6xy + 9y^2) - (4x^2 + 6xy + 6xy + 9y^2)}{(2x+3y).(2x-3y)} =$$

$$= \frac{4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x^2 - 12xy - 9y^2}{(2x + 3y).(2x - 3y)} = \frac{-24\,xy}{4x^2 - 9y^2} \checkmark$$

Podmienky : $x \neq \pm 3/2\ y$

5.) $$\frac{x + 2}{x - 3} - \frac{x + 1}{x - 4} - \frac{1}{x^2 - 7x + 12} =$$

$$= \frac{(x + 2).(x - 4) - (x + 1).(x - 3)\ - 1}{x^2 - 7x + 12} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 4x - 8 - (x^2 - 3x + x - 3) - 1}{(x - 3).(x + 4)} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 8 - x^2 + 2x + 3 - 1}{(x - 3).(x + 4)} = \frac{-6}{x^2 - 7x + 12} \checkmark$$

Podmienky : $x \neq 3,\ x \neq 4$

6.) $$\frac{7 - 8y}{6y + 12} - \frac{2y - 5}{10y + 20} + \frac{4y - 2}{2y + 4} =$$

$$= \frac{7 - 8y}{6.(y + 2)} - \frac{2y - 5}{10.(y + 2)} + \frac{4y - 2}{2.(y + 2)} =$$

$$= \frac{5.(7 - 8y) - 3.(2y - 5) + 15.(4y - 2)}{30.(y + 2)} =$$

$$= \frac{35 - 40y - 6y + 15 + 60y - 30}{30.(y + 2)} = \frac{14y + 20}{30.(y + 2)} = \frac{2.(7y + 10)}{30.(y + 2)}$$

$$= \frac{7y + 10}{15.(y + 2)} \checkmark$$

Podmienky : $y \neq -2$

7.) $$\frac{30a}{9a^2 - 1} + \frac{4}{3a - 1} - \frac{5}{3a + 1} =$$

$$= \frac{30a}{(3a - 1).(3a + 1)} + \frac{4}{3a - 1} - \frac{5}{3a + 1} =$$

$$= \frac{30a + 4.(3a + 1) - 5.(3a - 1)}{(3a - 1).(3a + 1)} = \frac{30a + 12a + 4 - 15a + 5}{(3a - 1).(3a + 1)} =$$

$$= \frac{27a + 9}{(3a - 1).(3a + 1)} = \frac{9.(3a + 1)}{(3a - 1).(3a + 1)} = \frac{9}{3a - 1} \checkmark$$

Podmienky : $a \neq \pm 1 / 3$

8.) $$\frac{ax - a}{x + 1} - \frac{ax + a}{x - 1} = \frac{(ax - a).(x - 1) - (ax + a).(x + 1)}{(x - 1).(x + 1)} =$$

$$= \frac{ax^2 - ax - ax + a - (ax^2 + ax + ax + a)}{(x - 1).(x + 1)} =$$

$$= \frac{ax^2 - 2ax + a - ax^2 - 2ax - a}{(x - 1).(x + 1)} = \frac{-4ax}{x^2 - 1} \checkmark$$

Podmienky : $x \neq \pm 1$

9.) $$\frac{4 - 2x + x^2}{2 + x} - 2 - x = \frac{4 - 2x + x^2}{2 + x} - \frac{2.(2 + x)}{2 + x} - \frac{x.(x + 2)}{2 + x} =$$

$$= \frac{4 - 2x + x^2 - 2.(2 + x) - x.(2 + x)}{2 + x} = \frac{4 - 2x + x^2 - 4 - 2x - 2x - x^2}{2 + x} =$$

$$= \frac{-\ 6x}{2 + x} \checkmark$$

Podmienky : $x \neq -2$

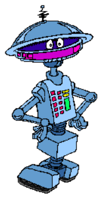
10.) $$\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} - \frac{a^2 - ab + b^2}{a - b} + \frac{2b^3 - b^2 + a^2}{a^2 - b^2} =$$

$$= \frac{(a^2 + ab + b^2).(a - b) - (a^2 - ab + b^2).(a + b) + (2b^3 - b^2 + a^2)}{(a - b).(a + b)} =$$

$$= \frac{a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 - a^3 + a^2b - ab^2 - a^2b + ab^2 - b^3 + 2b^3 - b^2 + a^2}{(a - b).(a + b)} =$$

$$= \frac{a^3 - b^3 - a^3 - b^3 + 2b^3 - b^2 + a^2}{(a - b).(a + b)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = 1 \checkmark$$

Podmienky : $a \neq \pm b$



2.4. Kombinované výrazy

1.) $$\left(\frac{x^2 - 4}{x - 3} : \frac{x - 2}{2}\right) . \frac{x^2 - 3x}{x + 2} = \frac{(x - 2).(x + 2).2.x.(x - 3)}{(x - 3).(x - 2).(x + 2)} = 2x \ \checkmark$$

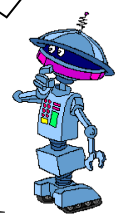
Podmienky : $x \neq 3$, $x \neq \pm 2$

2.) $$\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 5x} . \frac{x + 5}{1 - x} : \frac{(x + 1)^2}{x} = \frac{2.(x - 1).(x + 1)\ (x + 5)\ .x}{x.(x + 5).(1 - x).(x + 1).(x + 1)} =$$

$$= \frac{2x\ .\ (x - 1)}{-\ x.(x - 1).(x + 1)} = \frac{-\ 2}{x + 1} \ \checkmark$$

Podmienky : $x \neq 0$,$x \neq -5$, $x \neq \pm 1$

Tu som to pre teba skombinoval všetko dohromady a nemám k tomu už čo dodať !



3.) $$\frac{x^2 - y^2}{4x^2} . \frac{2x^2 - 2xy}{x^2 + 2xy + y^2} : \frac{(x - y)^2}{-x - y} =$$

$$= \frac{(x - y).(x + y).2x.(x - y).(-x - y)}{4x^2\ .(x + y).(x + y).(x - y).(x - y)} = \frac{-(x + y)}{2x.(x + y)} = -\frac{1}{2x} \ \checkmark$$

Podmienky : $x \neq \pm y$, $x \neq 0$

4.) $$(2 - x)^2 - \frac{x.(2x - 6)}{2} = \frac{2.(2 - x)^2 - 2x^2 + 6x}{2} =$$

$$= \frac{2.(4 - 4x + x^2) - 2x^2 + 6x}{2} = \frac{8 - 8x + 2x^2 - 2x^2 + 6x}{2} =$$

$$= \frac{8 - 2x}{2} = \frac{2.(4 - x)}{2} = 4 - x \ \checkmark$$

Podmienky : všetky reálne čísla, pretože menovateľ je číslo 2

5.) $$\left(4 - \frac{x^2}{y^2}\right) : \frac{2y - x}{y^2} = \frac{(4y^2 - x^2)\ .\ y^2}{y^2\ .\ (2y - x)} = \frac{(2y - x).(2y + x)}{(2y - x)} = 2y + x \ \checkmark$$

Podmienky : $y \neq 0$, $y \neq x/2$